Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. S. Kühnlein
Heiner Utz

Karlsruhe, 30. 4. 2003

Mathe II für Inwis
Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $x_m = (1 + \frac{1}{m})^m$ und $y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

a) Man zeige: Für alle n ist $\lim_{m\to\infty} x_m \geq y_n$.

b) Man folgere aus a), dass $\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{n\to\infty} y_n$ ist.

c) Man berechne y_{10} und x_{1000}.

Bemerkung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für alle n $x_n \leq y_n$ gilt und beide Folgen beschränkt, monoton wachsend und also konvergent sind. Der gemeinsame Grenzwert heißt **Eulersche Zahl** und wird mit e bezeichnet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Seien (x_n) und (y_n) konvergente reelle Zahlenfolgen mit $x_n \leq y_n$. Man zeige:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

b) Man gebe Folgen (x_n) und (y_n) an mit $x_n < y_n$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Man berechne (falls sie existieren) die Grenzwerte

a) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

und

b) $\lim_{n\to\infty} (10^{-5} \cdot n^2 - 3796 \cdot n)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie hat die Eigenwerte 1 und 2 mit Eigenräumen $E_1 = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $E_2 = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. Für einen Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^2$ sei die Folge (v_n) in $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$v_n := \frac{1}{2^n} A^n v_0.$$

a) Was ist der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ in den Fällen $v_0 \in E_1$ bzw. $v_0 \in E_2$?

b) Sei nun v_0 beliebig. Dann lässt es sich schreiben als

$$v_0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \beta\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Abgabe: Am 7. Mai 2003 bis 12.00 Uhr in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes.