Mathematik II

für die Fachrichtung Informationswirtschaft

SS 2002

(G. Herzog, V. Drumm)

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen

Wir kennen schon aus dem 1. Semester die Zahlbereiche.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Zur Erinnerung:
$\mathbb{Z}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper:
$(K, +, \cdot)$ heißt Körper, falls

(1) $(K, +)$ abelsche Gruppe (mit Neutralement 0)

(2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe (mit Neutralelement $1 \neq 0$)

(3)
$$\begin{array}{c} x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \end{array} \qquad (x, y, z \in K).$$

$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind *angeordnete Körper*, d.h. es gibt eine Relation "$<$" (kleiner) auf $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Zwischen je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ besteht genau eine der Relationen

$$x < y, \ x = y, \ y < x.$$

(b) Aus $x < y, y < z$ folgt $y < z$ (Transitivität).

(c) Aus $x < y$ folgt $x + y < y + z$ (Monotoniegesetz der Addition).

(d) Aus $x < y, 0 < z$ folgt $xz < yz$ (Monotoniegesetz der Multiplikation).

Folgerung: $0 < 1 < 2 < 3 \ldots$.

Der Körper $\mathbb{C}$ kann so nicht angeordnet werden: angenommen es gibt eine Ordnung auf $\mathbb{C}$ mit obigen Eigenschaften.
Dann ist $0 \neq i \Rightarrow 0 < i$ oder $i < 0$
$0 < i \underset{(d)}{\Rightarrow} 0 < i^2 = -1$ Wid.
$i < 0 \Rightarrow 0 < -i \underset{(d)}{\Rightarrow} 0 < (-i)^2 = -1$ Wid.

Die Zahlen aus $\mathbb{Q}$ heißen *rational*, die Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen *irrational*:
$\mathbb{Q}$ ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Z.B. sind $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{4}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$ irrational.

Beweis, dass $\sqrt[5]{4}$ irrational ist: Angenommen $\sqrt[5]{4} \in \mathbb{Q}$.
Dann existieren $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd mit

$$\sqrt[5]{4} = \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{m^5}{n^5}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot n^5 = m^5$$

$$\Rightarrow 2 \mid m^5$$
$$\Rightarrow 2 \mid m$$
$$\Rightarrow m = 2 \cdot p, \quad p \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow 4 \cdot n^5 = 2^5 \cdot p^5$$
$$\Rightarrow n^5 = 2^3 \cdot p^5$$
$$\Rightarrow 2 \mid n^5$$
$$\Rightarrow 2 \mid n$$
$$\Rightarrow n, m \text{ sind nicht teilerfremd.}$$

Folgerung: $a + b\sqrt[5]{4}$ ist irrational für alle $a, b \in \mathbb{Q},\ b \neq 0$.

Es gibt in einem mathematisch präzisierbaren Sinn "mehr" irrationale Zahlen als rationale Zahlen.

Suprema und Minima in $\mathbb{R}$:

Sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$
$s \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke von M* $:\Leftrightarrow x \leq s \ (x \in M)$
$s \in \mathbb{R}$ heißt *untere Schranke von M* $:\Leftrightarrow x \geq s \ (x \in M)$
M heißt dann *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt.*
Ist M nach oben und nach unten beschränkt, so heißt M *beschränkt.*

Beispiele:

$0, -1, -2$ sind untere Schranken von $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$;
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ haben keine oberen Schranken;
$M = [-2, 5] = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 5\}$ ist beschränkt;
$(-\infty, b)$ ist nach oben beschränkt und nach unten nicht beschränkt.

$a \in \mathbb{R}$ heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum von M*, wenn a obere Schranke ist und für jede obere Schranke s von M $a \leq s$ ist.
Schreibweise: $a = \sup M$.

Ist $a \in M$, so heißt a *Maximum von M*: $a = \max M$.

Analog: *a größte untere Schranke* oder *Infimum von M*: $a = \inf M$.
$a \in M$: *Minimum* von M, $a = \min M$.

Beispiele:

$M_1 = [-2, 5],\ -2 = \inf M_1 = \min M_1,\ 5 = \sup M_1 = \max M_1$;
$M_2 = (-2, 5),\ -2 = \inf M_2,\ 5 = \sup M_2$, Maximum und Minimum von M_2 existieren nicht!

Jetzt können wir neben der Körpereigenschaft und der Anordnungseigenschaft die 3. Haupteigenschaft von $\mathbb{R}$ formulieren. Es ist diese Eigenschaft, die den Hauptunterschied zwishen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ ausmacht.

Existenz des Supremums: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$ (nicht notwendig in M!).

Folgerung: Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine größte untere Schranke, denn:
$M' = \{-x : x \in M\}$ ist nach oben beschränkt
$\Rightarrow \sup M'$ existiert
$\Rightarrow \inf M = -\sup M'$ existiert.

Das Supremum bzw. Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist im allgemeinen keine Zahl aus $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} M &= \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

M ist nach oben beschränkt, aber

$$\sup M = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Hier wurde benutzt: $\mathbb{Q}$ ist **dicht** in $\mathbb{R}$, d.h. in jedem (offenen, nichtleeren) Intervall liegen auch rationale Zahlen.

2 Grenzwerte

2.1 Folgen

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Folge von Elementen von X ("Folge in X") ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X.
Schreibweisen:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

Ebenso bezeichnet man als Folge:

$$(x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) = (x_n)_{n \geq m},\ (x_n)_{n=m}^{\infty} \text{ mit } m \in \mathbb{Z}.$$

Beispiele:

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ Folge in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{Q}$)
$(i^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$: $1, i, -1, -i, 1, i, \dots$ Folge in $\mathbb{C}$
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = \begin{pmatrix} 1 + 1/n \\ 1 - 1/n \end{pmatrix}$ Folge in $\mathbb{R}^2$

Konvergenz von Folgen:
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in X.
Die Menge $U_\varepsilon(a) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ heißt ε-Umgebung von a.

Wesentlich: Auf X muss eine Abstandsfunktion definiert sein. Für uns sind in dieser Vorlesung hauptsächlich die Fälle

$$X = \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{R}^n\ (n \geq 2),$$

wichtig. Als Abstandsfunktionen nehmen wir die von dem Standardskalarprodukt induzierte *euklidische* Norm bzw. Metrik:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

In $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x-y|$ reelle Betragsfunktion.
In $\mathbb{C}$: $d(z,w) = |z-w|$ komplexe Betragsfunktion.

$|z-w| = \sqrt{(z-w)\overline{(z-w)}}$
$= \sqrt{(z_1-w_1)^2+(z_2-w_2)^2},\ z = z_1+iz_2,\ w = w_1+iw_2.$

ε-Umgebungen sind dann

in $\mathbb{R}$: $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$-\varepsilon < x-a < \varepsilon \Leftrightarrow$
$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$, also
$U_\varepsilon(a) = \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ offenes Intervall mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}$.

in $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}^2$): $U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$ Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius ε.

in $\mathbb{R}^3$: $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x-a\| < \varepsilon\}$
$= \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2 < \varepsilon^2\}$
Kugel mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^3$ und Radius ε.
usw.

Definition 2.1 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Folge konvergiert gegen a, wenn gilt:*
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:
$d(x_n, a) = |x_n - a| < \varepsilon$.

(Also: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \varepsilon$.)

Ist dies der Fall, so heißt a Grenzwert (Limes) der Folge (x_n).
Schreibweise: $x_n \to a\ (n \to \infty)$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Konvergente Folge: Grenzwert existiert.
Divergente Folge: Grenzwert existiert nicht.

Für Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ ist die Konvergenz analog definiert. Also:

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen a*, wenn gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass alle Folgenglieder x_k mit $k \geq k_0$ in $U_\varepsilon(a)$ liegen (d.h. $d(x_k, a) < \varepsilon$ erfüllen).

Die Konvergenz von Folgen, die nicht bei 1 sondern $m \in \mathbb{Z}$ beginnen ist genauso definiert (ersetze $\mathbb{N}$ durch die Menge $\{m, m+1, m+2, \dots\}$).

Beispiele:

$x_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

$x_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$:
$\|x_n - \binom{1}{1}\| < \varepsilon \Leftrightarrow \| \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \| < \varepsilon \Leftrightarrow \| \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \|^2 < \varepsilon^2$
$\Leftrightarrow \frac{2}{n^2} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow n^2 > \frac{2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$.
Wähle $n_0 > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ obige Ungleichung.

Satz 2.2 *Eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ hat genau einen Grenzwert.*

Beweis: Angenommen a und b seien Grenzwerte von (x_n).
Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |x_n - b| < \varepsilon.$$

Dann ist aber $|a-b| \leq |a-x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon$. Da ε beliebige gewählt werden kann, folgt daraus, dass $|a-b| = 0$, also $a = b$. $\square$

Bemerkungen:

1) Satz (2.2) gilt auch für Folgen (x_k) in $\mathbb{R}^n$.

2) $x_n \to a$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow d(x_n, a) \to 0$ $(n \to \infty)$
(Reduktion auf Konvergenz reeller Zahlenfolgen gegen 0.)

3) **Teilfolgen** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ entstehen durch Weglassen von Folgengliedern.
z.B. $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_2, x_4, x_6, \dots)$;
$(x_{2^n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_2, x_4, x_8, \dots)$;
allg. $(x_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **streng** monoton wachsend.

   Gilt $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, dann konvergiert auch jede Teilfolge von (x_n) gegen a.

   z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert.
   $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ (Nullfolge). Damit ist auch $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots)$ eine Nullfolge.

4) Konvergente Folgen sind beschränkt, d.h.
   $\exists\, r \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \leq r$ ($\|x_n\| \leq r$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn:
   Wähle $\varepsilon = 1$. Dann liegen nur endlich viele Folgenglieder außerhalb von $U_1(a)$.
   Setze $r := \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|, \|a\| + 1\}$.

Insbesondere sind also unbeschränkte Folgen divergent.

Beispiele:

$(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent,
$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent für $|x| > 1$,
aber:
$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und trotzdem divergent.

Rechenregeln für Grenzwerte in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$:

Satz 2.3 *Sei* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.
Dann gilt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$*;*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$*;*

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$*, falls* $b \neq 0$ *(dann ist* $y_n \neq 0$ *für fast alle* n*, d.h. ab einem Index* m_0*);*

(d) $x_n \leq y_n$ *für fast alle* $n \Rightarrow a \leq b$ *(nur für* $\mathbb{R}$*).*

Bemerkung: Aussage (a) gilt auch für Folgen in $\mathbb{R}^n$; (b), (c) können nicht übertragen werden, da für $n \geq 3$ keine Multiplikation auf $\mathbb{R}^n$ erklärt ist.

Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3n^2+4}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4}{n^2+1} =$$
$$1 + 0 + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{4}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})} = 1 + 0 + \frac{3}{1} = 4$$

Konvergenzkriterien für Folgen

Problem: Wie zeigt man die Konvergenz einer Folge, wenn man $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nicht kennt (und auch nicht raten kann)?

Beispiel:

$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n =?$

Satz 2.4 *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge ist konvergent.*

Monoton wachsend: $x_n \le x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$,
nach oben beschränkt: $\exists\, s \in \mathbb{R} : x_n \le s$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bem.: Analog ist jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergent.

Beweis: Wegen der Beschränktheit der Folge existiert

$$a := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
$\Rightarrow a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke, d.h. es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \le a.$$

Dann gilt für alle $n \ge n_0$:

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \underset{Monotonie}{\le} x_n \le a < a + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

Beispiel 1:

Geometrische Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}, 0 < x < 1, x \in \mathbb{R}$; monoton fallend:

$$x^n \ge x^{n+1} \Leftrightarrow 1 \ge \frac{x^{n+1}}{x^n} = x;$$

nach unten beschränkt: $x^n \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$; somit konvergent. Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n =: a = 0$$

denn

$$a = \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = x \lim_{n\to\infty} x^n = xa,$$

und wegen $x \in (0,1)$ folgt $a = 0$.

Beispiel 2:

$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$; monoton wachsend:
$\forall\, n \ge 2 : x_{n-1} \le x_n$, denn

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n : \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot n}{n^n \quad \cdot n^{n-1} \quad \cdot (n-1) \cdot n}$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$\underset{Bernoulli}{\geq} \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1.$$

(x_n) nach oben beschränkt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-k+1)}{n^k}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \text{da } k! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k \geq 2^{k-1})$$

$$\underset{geom.Summe}{=} 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$< 1 + 2 = 3.$$

Also ist $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

ÜA: Es gilt

$$e = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Beispiel 3:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sqrt[n]{x})_{n \in \mathbb{N}}, \ x \geq 0.$

1. Fall: $1 \leq x$
(x_n) nach unten beschränkt: $\sqrt[n]{x} \geq 1 \ (n \in \mathbb{N})$
(x_n) monoton fallend:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n+1}}} = x^{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)} = \sqrt[n(n+1)]{x} \geq 1.$$

Also (x_n) konvergent:

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n = \inf\{ \sqrt[n]{x} \mid n \in \mathbb{N}\} \geq 1$$

Annahme: $a > 1 \Rightarrow \exists\, k > 0 : a = 1 + k$
$\Rightarrow x = x_n^n \geq a^n = (1+k)^n \underset{Bernoulli}{\geq} 1 + n \cdot k$
$\Rightarrow \frac{x-1}{k} \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$, Wid.

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \text{ für } x \geq 1.$$

2. Fall: $0 < x < 1$
$1 < \frac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = 1.$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$

Definition 2.5 *Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ heißt eine Cauchy-Folge, wenn gilt:*
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq n_0$ gilt

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Ab Index n_0 haben also alle Folgenglieder einen Abstand $< \varepsilon$ zueinander.

Es ist klar, dass jede konvergente Folge zwangsläufig eine Cauchy-Folge ist. Im $\mathbb{R}^n$ gilt hiervon die Umkehrung:

Satz 2.6 *(Cauchy-Kriterium): Eine Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Vorteil dieses Satzes: Konvergenz kann nachgeprüft werden ohne Kenntnis der Grenzwerte. Divergenz kann nachgeprüft werden ohne Konvergenz gegen a für jedes a auszuschließen. Die Eigenschaft, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man auch Vollständigkeit.

Beispiel:

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ \frac{1}{k}$.
Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig.
Dann gilt für alle $n > n_0$ und $m = 2n$:
$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, also divergiert (x_k).

2.2 Reihen

Definition 2.7 *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{R},\mathbb{C}$. *Dann heißt die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n\text{−te Partialsumme})$$

eine (unendliche) Reihe und wir schreiben dafür:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Konvergiert die Folge (s_n), *so heißt die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent und*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

heißt Summe oder Wert der Reihe und wir schreiben ebenfalls

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Divergiert (s_n), *so heißt auch die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Man beachte:

Das Symbol $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ wird in 2 Bedeutungen verwendet:

1. für die Reihe selbst, also die Folge (s_n);
2. für den Grenzwert der Reihe, falls dieser existiert.

Beispiele:

(1) geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\mathbb{C}, |x| < 1.$$

Denn: $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $x \neq 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$, da dann

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, denn $|x^{n+1} - 0| = |x|^{n+1} \to 0 \;\; (n \to \infty)$.

(2) harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergent.}$$

Denn: (s_n) ist divergent, da keine Cauchy-Folge (vgl. Bsp. nach Satz (2.6)).

Bemerkungen:

(a) Abändern endlich vieler Reihenglieder ändert nichts an Konvergenz oder Divergenz, sondern nur den Reihenwert.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow (a_k)$ ist Nullfolge.
Denn: $a_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$
Bea.: Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht (vgl. harmonische Reihe).
Anwendung: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ divergent für $x \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $|x| \geq 1$.

(c) $$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k}_{\text{falls beide Reihen konvergieren}}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} c a_k = c \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}_{\text{falls Reihe konvergiert}} \quad (c \in \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

(d) Vorsicht beim Ändern der Reihenfolge der a_k.

Beispiel: Die Leibnizsche Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$
ist konvergent (Grenzwert siehe später!)
Denn: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.
Dann gilt für alle $m, n \geq n_0$ (o.B.d.A. $m = n + p,\ p > 0$):
$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n+p}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right|$$
$$= \left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} + (-1)^{n+3}\frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p+1}\frac{1}{n+p}\right|$$
$$= |(-1)^n| \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{(-1)^{p+1}}{n+p}\right|$$
$$= \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)}_{>0} - \cdots + (-1)^{p+1}\frac{1}{n+p}$$
$< \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$ für $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.
Nach dem Cauchy-Kriterium ist (s_n) konvergent. Es gilt $s \geq 1/2$.

Eine Umordnung der Leibniz-Reihe:
$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \cdots =$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=$$
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots\right)=\frac{1}{2}s$$

Bemerkung: Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ existiert mit $b_k = a_{g(k)}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.
Durch Umordnung der Leibniz-Reihe ist es möglich, jede reelle Zahl als Reihenwert zu erhalten, aber auch eine divergente Reihe zu erzeugen.

Leibniz-Kriterium:
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert falls gilt:

1. (a_k) ist alternierend, d.h. $a_k a_{k+1} \leq 0$ $(k \geq 0)$;
2. $(|a_k|)$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Absolut konvergente Reihen:
Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 2.8 *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis: Cauchy-Kriterium:

$$|s_{n+p}-s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$ und alle $p > 0$. □

Beispiel: Die Leibnizsche Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Vorteil beim Rechnen mit absolut konvergenten Reihen:

Satz 2.9 *Umordnungssatz: Konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut, dann auch jede Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$*, die durch Umordnen aus* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *entsteht, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Tests für die absolute Konvergenz von Reihen: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Satz 2.10 *Majoranten-Minoranten-Kriterium.*
Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *Reihen mit* $|a_k| \leq b_k$ *für fast alle* $k \in \mathbb{N}_0$*. Dann gilt:*

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergent* $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *divergent* $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *divergent.*

Beiweis: (a) Cauchy-Kriterium:

$\left|\sum\limits_{k=0}^{n+p} |a_k| - \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$
$\leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und alle $p > 0$.

(b) wegen (a). □

Beispiel:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ ist konvergent, denn

$$\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{k^2} \ (k \in \mathbb{N})$$

und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent:
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ist monoton wachsend und beschränkt:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Teleskopsumme

Satz 2.11 *Quotientenkriterium:*
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \neq 0$ *für fast alle* $k \in \mathbb{N}_0$*.*
Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c$ *existiert, dann gilt:*

1. *Ist $c < 1$ so konvergiert* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut.*

2. *Ist $c > 1$ so divergiert die Reihe.*

Achtung: Im Fall $c = 1$ sind beide Fälle möglich!

Beispiel: Sei $z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1$.
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^{100000} z^k$ konvergiert, denn

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)^{100000} z^{k+1}}{k^{100000} z^k}\right| = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{100000} |z|$$

$$\to |z| < 1 \ (k \to \infty).$$

Satz 2.12 *Wurzelkriterium:*
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe. Wenn* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c$ *existiert, dann gilt:*

1. *Ist $c < 1$ so konvergiert* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut.*

2. *Ist $c > 1$ so divergiert die Reihe.*

Achtung: Für $c = 1$ sind beide Fälle möglich!

Beweis von 1.: Sei $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c < 1$
Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, daß $b := c + \varepsilon < 1$.
Nach Definition des Grenzwertes existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt[k]{|a_k|} - c\right| &< \varepsilon && \text{für } k \geq k_0 \\
\Rightarrow -\varepsilon < \sqrt[k]{|a_k|} - c &< \varepsilon && \text{für } k \geq k_0 \\
\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} &< b && \text{für } k \geq k_0 \\
\Rightarrow |a_k| &< b^k && \text{für } k \geq k_0.
\end{aligned}$$

Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b^k$ ist eine konvergente Majorante. □

Beispiel:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ ist absolut konvergent, denn

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{1}{e} < 1 \ \ (k \to \infty).$$

Produkt von Reihen:

Satz 2.13 *Wenn* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergieren, dann auch das "Cauchy-Produkt"*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

"Cauchy-Produkt": Die n-te innere Summe ist die Summe der Elemente in der $n-1$-ten Diagonalen des folgenden Schemas:

$$\begin{array}{ccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \dots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots \\
a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Beispiel:

Für $|x|<1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ absolut konvergent.

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}}_{(n+1)x^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Also $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots=\frac{1}{(1-x)^2}$ für $|x|<1$.

2.3 Potenzreihen

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

mit $x\in\mathbb{R},\mathbb{C}$ heißt *Potenzreihe.*

Allgemein: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ Potenzreihe um $x_0\in\mathbb{R},\mathbb{C}$;
x_0 heißt *Entwicklungspunkt*, und $a_0,a_1,a_2,\dots$ heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe.

Beispiele:

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.
Hier ist $a_k = 1$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und $x_0 = 0$.
Eine Potenzreihe definiert eine Funktion: Hier ist $\frac{1}{1-x} = f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ für $|x| < 1$.

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-5)^k = \frac{1}{x-4}$ für $|x-5| < 1$.
Hier ist $a_k = (-1)^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und $x_0 = 5$.
Setze $y = -(x-5)$.
Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}$ für $|y| < 1$, also
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-5)^k = \frac{1}{1+(x-5)} = \frac{1}{x-4}$ für $|x-5| < 1$.

(3) Polynomfunktionen sind Potenzreihen, für die nur endliche viele $a_k \neq 0$ sind.

Die Exponentialfunktion

Die Potenzreihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
konvergiert absolut für *jedes* $x \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$.
Der Fall $x = 0$ ist offensichtlich. Sei $x \neq 0$. Quotientenkrit. mit $a_k := \frac{1}{k!} x^k$:
$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{k! x^{k+1}}{(k+1)! x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1} \to 0 \ (k \to \infty).$$
Damit ist eine Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert, die Exponentialfunktion:
$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Eigenschaften:

(1) $\forall\, x, y \in \mathbb{C} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
Denn:
$$\exp(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} \right) \ (\text{Cauchy} - \text{Prod.})$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right)$$
$$= \exp(x) \cdot \exp(y).$$

(2) $\exp(0) = 1$

(3) $\exp(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Für $n, m \in \mathbb{N} : \exp(n) = \exp(1 + \cdots + 1) = (\exp(1))^n = e^n$;
$(\exp(\frac{1}{n}))^n = \exp(n \cdot \frac{1}{n}) = e$, also $\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$;
$\exp(\frac{m}{n}) = \exp(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}) = (\exp(\frac{1}{n}))^m = e^{\frac{m}{n}}$;
$\exp(-\frac{m}{n}) \cdot \exp(\frac{m}{n}) = \exp\left(-\frac{m}{n} + \frac{m}{n}\right) = 1$, also
$\exp(-\frac{m}{n}) = \frac{1}{e^{\frac{m}{n}}} = e^{-\frac{m}{n}}$.

Resultat: $\forall\, q \in \mathbb{Q}$ gilt $e^q = \exp(q)$.

Man *definiert* daher für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x := \exp(x).$$

Weitere Eigenschaften von $e^x, x \in \mathbb{R}$:

(4) e^x ist streng monoton wachsend, der Wertebereich ist $(0, \infty)$, denn:

$$\left.\begin{array}{r} e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0 \\ e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1 \Rightarrow e^x \neq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow e^x > 0 \ (x \in \mathbb{R}).$$

$0 \leq x < y \underset{Def.}{\Rightarrow} e^x < e^y$

$x < y < 0 \Rightarrow 0 < -y < -x \Rightarrow 1 < e^{-y} < e^{-x}$
$\Rightarrow 1 < \frac{1}{e^y} < \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^x < e^y < 1$

(5) $1 + x \leq e^x$ $(x \in \mathbb{R})$. Denn:

$x \geq 0 : 1 + x \geq e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$

$x \leq -1 : 1 + x \leq 0 \Rightarrow 1 + x \leq e^x$

$$-1 < x < 0 : e^x = 1 + x + \underbrace{(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})}_{\geq 0} + \underbrace{(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!})}_{\geq 0} + \cdots \geq 1 + x$$

(6) Die Umkehrfunktion ln von exp:

$$\ln : \ (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad \text{(natürlicher Logarithmus)}$$

Es gilt:

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y),$$

denn:
$\exp(\ln(x)) = x \ (x \in (0,\infty))$
$\ln(\exp(x)) = x \ (x \in \mathbb{R})$
$x \cdot y = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y))$
$\Rightarrow \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y).$ □

Allgemeine Exponentialfunktion: $\exp_a : \mathbb{R} \to (0,\infty)$
Für $x, a \in \mathbb{R}, a > 0$:
$$a^x := \exp_a(x) := e^{x \ln(a)}.$$
Umkehrfunktion $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$: Logarithmus zur Basis $a \neq 1$.
$$\log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$
Rechenregeln als ÜA!

Wir kehren zurück zur komplexen Exponentialfunktion. In Analogie zum reellen Fall schreiben wir auch hier
$$e^z := \exp(z).$$
Spezialfall: $z = ix, \ x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\ &= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(x) + i \sin(x). \end{aligned}$$
$$\cos x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!};$$
$$\sin x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Bem.: Beide Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{C}$. (ÜA!)

Eigenschaften der Funktionen $\cos, \ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**:**

(a) $\cos(0) = 1, \ \cos(-x) = \cos(x) \ (x \in \mathbb{R})$ (der Cosinus ist gerade)

$\sin(0) = 0, \ \sin(-x) = -\sin(x) \ (x \in \mathbb{R})$ (der Sinus ist ungerade)

(b) Additionstheoreme:
$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{aligned} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$
Denn:
$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$
$= (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$
$= (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y))$

(c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$. Denn:

$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x) = \overline{e^{ix}}$

$\Rightarrow |e^{ix}|^2 = e^{ix}e^{-ix} = 1$

$\Rightarrow (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ $(x \in \mathbb{R})$.

Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen (vgl. 1. Semester).

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k.$$

Konvergiert diese Reihe für ein $x_1 \in \mathbb{C}, x_1 \neq x_0$, so konvergiert sie absolut für alle $x \in \mathbb{C}$ mit

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|.$$

Beweis: Majorantenkriterium:

$$0 \leq q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} < 1, \quad |a_k(x_1 - x_0)^k| \to 0 \ \ (k \to \infty).$$

Somit ex. ein k_0 mit

$$|a_k(x - x_0)^k| = |a_k(x_1 - x_0)^k| \Big(\frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \Big)^k \leq q^k$$

für $k \geq k_0$. □

Damit sind 3 Fälle möglich:

1. Die Reihe konvergiert nur für $x = x_0$. Konvergenzradius $r := 0$.
2. Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$. Konvergenzradius $r := \infty$.
3. Die Reihe konvergiert an einer Stelle $x_1 \neq x_0$ und divergiert an einer Stelle x_2. Dann konvergiert die Reihe im Inneren eines Kreises vom Radius $r > 0$ um x_0 absolut und divergiert außerhalb (für alle x mit $|x - x_0| > r$). r heißt Konvergenzradius. Es ist
$r = \sup\{\rho \geq 0 :$ Reihe konv. absolut für alle x mit $|x - x_0| < \rho\}$.

Bem.: Im 3. Fall $(r > 0)$ kann in einem Punkt auf der Kreislinie $\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| = r\}$ Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

Im Fall $r > 0$ (bzw. $r = \infty$) definiert die Potenzreihe eine Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

im Konvergenzkreis $\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < r\}$ (bzw. auf $\mathbb{C}$).

Beispiele:

(1) $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ in $\{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$, $r = 1$.

(2) $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ in $\mathbb{C}$, $r = \infty$.

(3) $f(x) = \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{-x^2}{2})} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k$ für $\left|\frac{x^2}{2}\right| < 1$. Somit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} x^{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \dots$$

konvergiert absolut für $|x| < \sqrt{2}$, und divergiert für $|x| > \sqrt{2}$. Also ist der Konvergenzradius $r = \sqrt{2}$.

Einschub: Divergenz einer Folge gegen ∞ oder $-\infty$:
Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. In Analogie der Definition der Konvergenz definiert man:
Die Folge (b_n) divergiert gegen ∞
(Schreibweise: $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$)
falls gilt:

Zu jedem $R > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $b_n > R$.
(Also: $\forall R > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ b_n > R$.)

Analog definiert man Divergenz gegen $-\infty$.

Bsp.: 1.) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - n = \infty$, denn ist $R > 0$, so gilt für $n \geq 2$:

$$n^2 - n = n(n-1) \geq n$$

Also ist $n^2 - n > R$ für $n \geq n_0$, wenn man $n_0 > \max\{2, R\}$ wählt.

2.) Die Folge $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht divergent gegen ∞ oder $-\infty$.

3.) Jede monoton wachsende unbeschränkte Folge divergiert gegen ∞.

Satz 2.14 *Satz (Berechnung des Konvergenzradius).*
Gegeben

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

(a) Existiert $c = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, *dann ist*

$$r = \begin{cases} 0 & \text{für } c = \infty \\ 1/c & \text{für } c \neq 0 \\ \infty & \text{für } c = 0 \end{cases}.$$

(b) Existiert $d = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, *dann ist*

$$r = \begin{cases} 0 & \text{für } d = \infty \\ 1/d & \text{für } d \neq 0 \\ \infty & \text{für } d = 0 \end{cases} .$$

Beweis:

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k} \right| = |x - x_0| \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x - x_0|c$
$c = 0$: Konvergenz für alle $x \in \mathbb{C}$, also $r = \infty$.
$c \neq 0$: Konvergenz für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| \cdot c < 1$ und Divergenz für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| \cdot c > 1$ (Quotientenkrit.).
Also ist $r = \frac{1}{c}$.
Ist $c = \infty$ so gilt für $x \neq x_0$ ebenfalls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k} \right| = \infty$$

Dann ist $(a_k(x - x_0)^k)$ keine Nullfolge und die Reihe divergiert.

(b) Analog mit Wurzelkrit. □

Beispiele:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k+1} - 1\right) x^k$
$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}-1} \right| = \left| \frac{2-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2^{k+1}}} \right| \to 2 \quad (k \to \infty)$.
Also: $r = \frac{1}{2}$.

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1} - 1)x^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1} - 1)(x^3)^k$:
Konvergiert für $|x^3| < \frac{1}{2}$, also für $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;
Divergiert für $|x^3| > \frac{1}{2}$, also für $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Somit: $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$
$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = k + 1 \to \infty \quad (k \to \infty)$.
Also: $r = 0$.

g-adische Entwicklung:

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq a < k + 1$.
$[a] := k$; größte ganze Zahl $\leq a$.

Ab jetzt seien in diesem Abschnitt stets

$$a \geq 0,\ g \in \mathbb{N},\ g > 1.$$

Setze $z_0 := [a] \Rightarrow z_0 \leq a < z_0 + 1,\ z_0 \in \mathbb{N}_0$.
Setze $z_1 := [(a - z_0)g] \Rightarrow z_1 \leq (a - z_0)g < z_1 + 1,\ z_1 \in \mathbb{N}_0$.
$\Rightarrow z_0 + \frac{z_1}{g} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{1}{g}$.

Es gilt: $z_1 \leq g - 1$.
(Andernfalls: $z_1 > g - 1 \Rightarrow z_1 \geq g \Rightarrow \frac{z_1}{g} \geq 1 \Rightarrow z_0 + 1 \leq z_0 + \frac{z_1}{g} \leq a$. W! zu $a < z_0 + 1$.)

Setze $z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{g})g^2]$. Dann gilt:

$$z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \frac{1}{g^2},\ z_2 \in \mathbb{N}_0$$

und

$$z_2 \leq g - 1$$

$$(z_2 \geq g \Rightarrow \frac{z_2}{g^2} \geq \frac{1}{g} \Rightarrow z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{1}{g} \leq z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} \leq a \quad \text{W!}).$$

Allgemein: Sind $z_0, z_1, \dots, z_n$ definiert, so setze

$$z_{n+1} := \left[(a - z_0 - \frac{z_1}{g} - \cdots - \frac{z_n}{g^n}) g^{n+1} \right].$$

Wir erhalten eine Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(*) \qquad \begin{cases} z_0 + \frac{z_1}{g} + \cdots + \frac{z_n}{g^n} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{g} + \cdots + \frac{z_n}{g^n} + \frac{1}{g^n}\ (n \in \mathbb{N}_0) \\ \forall\, n \in N_0 : z_n \in \mathbb{N}_0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N} : z_n \leq g - 1 \end{cases}$$

Satz 2.15 *Ist* $(\widetilde{z_n})_{n=0}^{\infty}$ *eine weitere Folge mit den Eigenschaften in* $(*)$, so gilt $z_n = \widetilde{z_n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Ohne Beweis.

Betrachte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{z_n}{g^n} \leq \frac{g-1}{g^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} \text{ konv.} \underset{Maj.Krit.}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} \text{ konv.}$$

$$s_n := z_0 + \frac{z_1}{g} + \cdots + \frac{z_n}{g^n} \underset{(*)}{\Rightarrow} s_n \leq a < s_n + \frac{1}{g^n}$$

Somit gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} = a$.
Dafür schreiben wir:

$$a = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots \qquad \text{g} - \text{adische Entwicklung von } a.$$

Beispiel: $g = 10$.

(1) $a = 1 \Rightarrow z_0 = 1 \Rightarrow z_1 = [(a - z_0)g] = 0 \Rightarrow z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{g})g^2] = 0;$
$\ldots$ allg.: $z_n = 0$ $(n \geq 1)$.
Also: $1 = 1,000\ldots.$

(2) $a = \frac{1}{2} \Rightarrow z_0 = 0 \Rightarrow z_1 = [(\frac{1}{2} - 0)10] = 5, \; z_2 = [(\frac{1}{2} - 0 - \frac{5}{10})100] = 0;$
$\ldots$ allg.: $z_n = 0$ $(n \geq 2)$, also $\frac{1}{2} = 0,5000\cdots = 0,5$.

(3) $a = \frac{1}{3} \Rightarrow z_0 = 0 \Rightarrow z_1 = [(\frac{1}{3} - 0)10] = [\frac{9}{3} + \frac{1}{3}] = 3, \; z_2 = [(\frac{1}{3} - 0 - \frac{3}{10})100] = [\frac{100}{3} - 30] = [\frac{10}{3}] = 3;$ $\ldots$ allg.: $z_n = 3$ $(n \geq 1)$, also

$$\frac{1}{3} = 0,333\cdots = 0,\overline{3}.$$

Bemerkung: 1) Ist $b < 0$, so setze $a = -b \Rightarrow a > 0$. Ist $a = z_0, z_1 z_2 \ldots$ die g-adische Entwicklung von a, so ist die g-adische Entwicklung von b definiert als $-z_0, z_1 z_2 \ldots.$
2) Ist $a \geq 0$, so kann man zeigen: Es gibt genau eine Folge $(\widetilde{z_n})_{n=0}^{\infty}$ mit $\widetilde{z_n} \in \mathbb{N}_0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $\widetilde{z_n} \leq g - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \widetilde{z_0} + \frac{\widetilde{z_1}}{g} + \cdots + \frac{\widetilde{z_n}}{g^n} < a \leq \widetilde{z_0} + \frac{\widetilde{z_1}}{g} + \cdots + \frac{\widetilde{z_n}}{g^n} + \frac{1}{g^n}.$$

Diese Möglichkeit liefert im Fall $g = 10$ z.B.

$$1 = 0,999\ldots, \quad \frac{1}{2} = 0,4999\ldots.$$

Wir bleiben bei $(*)$!

Sei $a = z_0, z_1 z_2 \ldots$ die g-adische Entwicklung von a gemäß $(*)$. Dann gilt: $z_n = g - 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist nicht möglich.

Beweis: Angenommen: $z_n = g - 1$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, m \geq 1 \forall\, n \geq m : z_n = g - 1$.
$\Rightarrow a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} = \sum\limits_{n=0}^{m-1} \frac{z^n}{g^n} + \sum\limits_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} =$
$= s_{m-1} + (g-1)\left(\frac{1}{g^m} + \frac{1}{g^{m+1}} + \ldots\right) = s_{m-1} + \frac{g-1}{g^m}\left(1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \ldots\right)$
$= s_{m-1} + \frac{g-1}{g^m}\frac{1}{1-\frac{1}{g}} = s_{m-1} + \frac{1}{g^{m-1}} = \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{g} + \cdots + \frac{z_{m-1}}{g^{m-1}} + \frac{1}{g^{m-1}}}_{> a \text{ nach } (*)}$ W! $\square$

2.4 Grenzwerte und Stetigkeit bei Funktionen

Beispiele für Funktionen:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Sprungstelle bei $x = 0$.

(2) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin(x \cdot y)$.

(4) $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \min(x, \frac{1}{2}y)$.

(5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } y < x^2 \\ 1 & , \text{ falls } y \geq x^2 \end{cases}$.

Wenn wir das Verhalten einer Funktion f in der "Nähe" eines Punktes a untersuchen wollen, so müssen wir voraussetzen, dass in jeder ε-Umgebung von a noch von a verschiedene Punkte aus dem Definitionsbereich von f liegen. Man definiert:

a heißt **Häufungspunkt** der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, falls gilt:

$$D \cap (U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \neq \emptyset \quad (\varepsilon > 0).$$

Definition 2.16 *(Grenzwert und Stetigkeit von Abbildung)*
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, und $a \in \mathbb{R}^n$.
Ist $a \in D$ und gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$ für jede gegen a konvergente Folge (x_k) in D, so heißt f **stetig** *im Punkt a.*
Ist a Häufungspunkt von D, so heißt $b \in \mathbb{R}^m$ **Grenzwert** *von f für x gegen a (geschrieben $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, oder $f(x) \to b$ $(x \to a)$) falls gilt:*
Für jede gegen a konvergente Folge (x_k) in D mit $x_k \neq a$ für alle k gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = b.$$

Bem.: 1. Ist $a \in D$ und a Häufungspunkt von D, so ist f stetig in a genau dann wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt.
2. f heißt **stetig auf einer Teilmenge** $U \subseteq D$, falls f stetig in jedem Punkt $a \in U$ ist.
3. Ist speziell $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, so heißt $b \in \mathbb{R}^m$ Grenzwert von f für x gegen ∞ (geschrieben $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, oder $f(x) \to b$ $(x \to \infty)$) falls gilt:
Für *jede* gegen ∞ divergente Folge (x_k) in D gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$. (Analog für $x \to -\infty$.)

Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$:

Konvergenz einer Folge im $\mathbb{R}^n$ bedeutet koordinatenweise Konvergenz!

Bsp.:

$$x_k = \begin{pmatrix} \frac{k^3+1}{2k^3+k} \\ (1+\frac{1}{k})^k \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{für } k \to \infty),$$

$$y_k = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{N} \ \text{ divergiert, da } \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \right)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{divergiert.}$$

Beispiele:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ist unstetig in 0, da für $(x_k) = ((-1)^k/k)$ die Folge $f(x_k) = (-1)^k$ divergiert. Diese Folge zeigt auch, daß $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert.

(2) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
Weil 0 nicht zum Definitionsbereich von f gehört, stellt sich die Frage nach der Stetigkeit in 0 nicht. Man kann die Frage stellen ob man f in 0 stetig ergänzen kann, d.h. ob man, indem man $f(0)$ durch $c \in \mathbb{R}$ definiert, für ein geeignetes c eine in 0 stetige Funktion erhält. Dies ist hier nicht möglich, da der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

nicht existiert. Denn:

(x_k) mit $x_k = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi}$ ist eine Nullfolge, aber

$$f(x_k) = \sin((k+\frac{1}{2})\pi) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also existiert $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ nicht.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x \cdot y)$: Es gilt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \min(x, \frac{1}{2}y)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$. (ÜA!)

(5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < x^2 \\ 1 & \text{für } y \geq x^2. \end{cases}$

Für $(x_k, y_k) = (0, \frac{1}{k})$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = 1$.
Für $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0)$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = 0$,
also existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht. Insbesondere ist f unstetig in $(0,0)$.

Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen übertragen sich direkt auf Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen und stetige Funktionen:

$f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig in $a \in D$,
dann:

$$f \pm g \text{ stetig in } a,$$
$$c \cdot f \text{ stetig in } a \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$,
dann:

$$f \cdot g \text{ stetig in } a,$$
$$\frac{f}{g} \text{ stetig in } a, \text{ falls } g(x) \neq 0 \ (x \in D).$$

Bemerkung: Die stetigen Funktionen auf D bilden einen Vektorraum. Z.B.:

$$C([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig }\}.$$

Beispiele **für Grenzwerte:**

(1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}, \ x > 2.$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x-2}}{\lim\limits_{x\to 2} (\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$

(2) Eine wichtige Methode, Grenzwerte zu bestimmen, beruht auf der Potenzreihendarstellung von Funktionen:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots) = 1.$

Beispiele **für Stetigkeit:**

(1) Polynome in einer oder mehreren Variablen sind stetig. Bsp.:

$$f(x, y, z) = xy - 3x^3y^2 + y^4z^3x + 2y + 1$$

ist stetig auf $\mathbb{R}^3$.

(2) Rationale Funktionen in einer oder mehreren Variablen sind stetig. Bsp.:

$g : D \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \frac{x^2+y^2+z}{x+y+z}$, mit
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 0\}$.

(3) Potenzreihen sind stetig im Innern des Konvergenzkreises:

$$e^x, \sin, \cos \ \text{ stetig auf } \mathbb{R} \text{ (und } \mathbb{C}).$$

(4) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, so ist $f(I)$ ein Intervall und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig. Z.B.: $f(x) = x^2$ ist stetig und streng wachsend auf $[0, \infty)$, also ist $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ stetig auf $[0, \infty)$.

(5) Lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind stetig.

(6) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^T A x$ stetig.

Satz 2.17 *Ist Verkettung $g \circ f$ möglich, f stetig in a, g stetig in $f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis:
Sei (x_k) beliebige Folge in D_f mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \underset{f \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$
$\underset{g \text{ stetig in } f(a)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} g(f(x_k)) = g(f(a))$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} (g \circ f)(x_k) = (g \circ f)(a)$. $\square$

Beispiele:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$ ist stetig (Polynom);

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sin(t)$ ist stetig (Potenzreihe);

also ist $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x, y, z) = \sin(x^2 + y^3 + z^4)$ stetig.

Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen:

Satz 2.18 Nullstellensatz.
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Dann hat f in (a, b) (mindestens) eine Nullstelle.

Beweis Wenn etwa $f(b) > 0$ ist, so hat die Menge $\{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$ ein Infimum $m > a$. Dieses muss eine Nullstelle sein.

Beispiel:

$f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - x^2 + 1$
f stetig, $f(-1) = -1, f(0) = 1 \Rightarrow \exists\, x_0 \in (-1, 0)$ mit $f(x_0) = 0$.

Satz 2.19 Zwischenwertsatz:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$
f nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Sei etwa $f(a) > f(b)$.
Wähle $y \in (f(b), f(a))$ beliebig $\Rightarrow g := f - y$ ist stetig auf $[a, b]$.
$g(a) = f(a) - y > 0$
$g(b) = f(b) - y < 0$
$\Rightarrow \exists\, x \in (a, b)$ mit $g(x) = 0$, d.h. $f(x) = y$. $\square$

Kompaktheit:

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt** falls gilt:

1.) D is beschränkt, d.h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$||x|| \leq c \quad (x \in D).$$

2.) D ist abgeschlossen, d.h.: Ist (x_k) eine konvergente Folge in D, so liegt auch ihr Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ in D.

Beispiele: 1. Jedes Intervall der Form $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt
2. $(0, 1)$ ist nicht kompakt (da nicht abgeschlossen).
3. $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt (da nicht beschränkt).
4. $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ist kompakt (ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$).
5. $\{1, 2, 3\}$ ist kompakt.
6. $\mathbb{N}$ ist nicht kompakt (da unbeschränkt).
7. $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| \leq r\}$ ist kompakt ($r > 0$).

Satz 2.20 Satz von Maximum und Minimum:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $D \neq \emptyset$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann besitzt f sowohl ein globales Maximum, als auch ein globales Minimum, d.h. es existiert
$x_1 \in D: \quad f(x) \leq f(x_1) \quad (x \in D)$, *und*
$x_2 \in D: \quad f(x_2) \leq f(x) \quad (x \in D)$.
x_1 bzw. x_2 heißt globale Maximal- bzw Minimalstelle.

Notation:

$$f(x_1) = \max_{x\in D} f(x), \quad f(x_2) = \min_{x\in D} f(x).$$

Ohne Beweis.

Beispiele:

(1) $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x & , x < 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$
f ist unstetig und hat kein globales Maximum; 0 ist globale Minimalstelle.

(2) $f : (0, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x$.
f ist stetig, hat aber weder ein ein globales Maximum noch ein globales Minimum; $(0, 1)$ ist nicht kompakt.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 3(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 + 1$.
Es gilt $f(x, y) \geq 1$ und $f(2, -1) = 1$, also ist $(2, -1)$ globale Minimalstelle. Globales Maximum existiert nicht; $\mathbb{R}^2$ ist nicht "kompakt".

3 Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

3.1 Differenzierbarkeit

Viele Abläufe in den Naturwissenschaften aber auch in den Wirtschaftswissenschaften können durch reelle Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ "modelliert" werden. Dabei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, etwa $I = [a, b]$ oder $(-\infty, b)$ oder $\mathbb{R}$.

Für $x_0 \neq x_1$ beschreibt der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

die "mittlere Veränderung" eine Ablaufes (mittlere Geschwindigkeit, Kosten, Steuersatz u.s.w.) zwischen x_0 und x_1.

Wichtig ist aber meist die "momentane Änderungsrate", also der Grenzwert

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(Momentan -geschwindigkeit, -kosten, -steuersatz u.s.w.), falls er existiert.

Definition 3.1 *$f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x \in I$ (an der Stelle $x \in I$), wenn der Grenzwert*

$$f'(x) := \frac{df}{dx}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

existiert.

$f'(x)$ heißt die *Ableitung* von f an der Stelle x.
f differenzierbar auf I $:\Leftrightarrow$ f ist differenzierbar an jeder Stelle $x \in I$.

Beispiele:

(1) Konstante Funktion: $f(x) = c \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R})$,

dann $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$, also $f'(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

(2) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

(3) $f(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x. \end{aligned}$$

(4) $f(x) = \sin(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin(x) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\to 0} + \lim_{h\to 0} \cos(x) \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

Analog: $\cos'(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)$.

(5) $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Für $x > 0$ ist ja $\frac{f(x)-0}{x-0} = 1$, für $x < 0$ ist dieser Wert -1, und es gibt keinen Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Weitere Bezeichnungen:

$f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf I.
Dann hat man eine Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$.

f heißt *stetig differenzierbar* auf I, wenn f' stetig auf I ist.

f heißt 2-*mal differenzierbar* auf I, wenn f' differenzierbar auf I ist.

f heißt 2-*mal stetig differenzierbar* auf I, wenn f 2-mal differenzierbar auf I ist und f'' stetig auf I ist.

Analog: *k-mal (stetig) differenzierbar bzw. beliebig oft (stetig) differenzierbar.*

Bemerkung: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I, so ist f stetig auf I. Ist also z.B. f eine 2-mal differenzierbare Funktion, so ist sie stetig differenzierbar, denn f' ist dann als differenzierbare Funktion insbesondere stetig.

Beispiel:

$$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x \quad f^{(3)}(x) = 6 \quad f^{(k)}(x) = 0 \quad (k \geq 4).$$

f ist beliebig oft stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Schreibweisen:
$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ oder kurz: $f' = \frac{df}{dx}$,
$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$ oder kurz: $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$,
$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \frac{d^kf}{dx^k}(x) \quad \ldots.$

Beispiele:

(1) $\frac{d^2\sin}{dx^2}(x) = -\sin(x)$.
$(\cos(x))'' = -\cos(x)$.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ -2x & \text{für } x < 0 \end{cases}.$

Also: $f'(x) = 2|x|$ $(x \in \mathbb{R})$.

f' ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht differenzierbar in $x = 0$,
also: f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber nicht 2-mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

(3) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$

f ist differenzierbar auf $[-1,1]$, $f'(0) = 0$, aber f' ist unstetig in 0. Also ist f nicht stetig differenzierbar auf $[-1,1]$.

Lineare Approximation differenzierbarer Funktionen
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$.

Geometrische Deutung von:
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$: Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0)), (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$.
$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$: Steigung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ am Graph f.

Setzen wir $\varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_{x_0}(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 & \text{für } x = x_0 \end{cases},$$

so erhalten wir

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{affine Funktionen}} + \underbrace{\varphi_{x_0}(x)(x-x_0)}_{\text{Rest mit } \lim\limits_{x\to x_0}\varphi_{x_0}(x)=0} \quad (x \in I).$$

Anschauung: Für x "nahe genug" bei x_0 liegt

$f(x)$ "nahe" bei $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ und $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ "nahe" bei $f'(x_0)$.

Folgerung: f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0. Denn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varphi_{x_0}(x)(x - x_0) \right) = f(x_0).$$

3.2 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 3.2 *Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x, dann auch*

$$f \pm g,\ f \cdot g,\ cf\ (c \in \mathbb{R}),\ \frac{f}{g}\ \textit{(falls } g(x) \neq 0\textit{)}$$

und es gilt

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

Linearität

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Produkt- und Quotientenregel

Beweis:
Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel:
Spezialfall:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} =$$
$$= - \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Allgemein: Produktregel + Spezialfall. □

Satz 3.3 Kettenregel. *$f : I_1 \to I_2$ differenzierbar in $x_0 \in I_1$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $f(x_0) \in I_2 \Rightarrow g \circ f$ differenzierbar in x_0 und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis: g ist differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$.
Betrachte $g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \varphi_{y_0}(y)(y - y_0)$ $(y \in I_2)$.

Einsetzen von $f(x)$ für y liefert

$$\begin{array}{ccccc} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = g'(f(x_0)) \cdot & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & + \; \varphi_{f(x_0)} & \cdot (f(x)) & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ & \downarrow x \to x_0 & \downarrow x \to x_0 & & \downarrow x \to x_0 \\ & f'(x_0) & 0 & & f'(x_0) \end{array}$$

also: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. □

Beispiele:

(1) $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ $(x \in \mathbb{R})$, $a > 0$ fest

Denn:
$a^x = e^{x \ln a}$

$f(x) := x \ln a \Rightarrow f'(x) = \ln a$

$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$

$(a^x)' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$

(2) $f(x) = \sqrt{1 + x^4} = (1 + x^4)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^4)^{-\frac{1}{2}}(0 + 4x^3) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

Satz 3.4 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und injektiv (also streng monoton) und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Gilt $f'(x) \neq 0$ $(x \in I)$, so ist f^{-1} differenzierbar auf $f(I)$ und*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (x \in f(I)).$$

Ohne Beweis.

Beispiele:

(1) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

Denn: $e^{\ln x} = x$, und nach obigem Satz ist $\ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$.

(2) $f(x) = x^a$ $(x > 0)$, $a \in \mathbb{R}$ fest.

$f(x) = x^a = e^{a \ln(x)}$

$f'(x) = e^{a \ln(x)} \cdot (a \ln(x))' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$.

(3) $f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)}$ $(x \in (0, \pi)$

$$f'(x) = e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)} \cdot (\cos x \cdot \ln(\sin x))'$$
$$= (\sin x)^{\cos x} \cdot (-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \ln'(\sin x) \cdot \sin' x)$$
$$= (\sin x)^{\cos x}(-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \tfrac{\cos^2 x}{\sin x}).$$

ÜA: $\log_a'(x) = \frac{1}{(\ln a)\cdot x}$;
$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$;
$(x^x)' = (1 + \ln(x)) \cdot x^x,\ x \in (0, \infty)$.

Satz 3.5 (Gliedweise Differentiation von Potenzreihen.) *Sei* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *mit Konvergenzradius* $r > 0$. *Dann ist* f *differenzierbar auf* $I = (x_0 - r, x_0 + r)$, *und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k(x - x_0)^{k-1}$$

mit demselben Konvergenzradius r.

Ohne Beweis.

Bemerkung: Jede durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion f ist im Konvergenzintervall unendlich oft differenzierbar.

Beispiele:

(1) $(e^x)' = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} = e^x$

(2) $\sin' x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)'$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)$$
$$= \cos x.$$

Analog $\cos' x = -\sin x$.

(3) $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k\right)'$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k \ (|x| < 1).$$

3.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

Einseitige Grenzwerte: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$, ein Intervall, $x_0 \in I$ kein Randpunkt von I und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist

$$\lim_{x \to x_0+} f(x)$$

definiert als der Grenzwert von $f\,|_{I\cap(x_0,\infty)}$ für $x \to x_0$ (falls dieser existiert), oder äquivalent: In der Definition des Grenzwerts werden nur Folgen zugelassen die in $I \cap (x_0, \infty)$ liegen. Analog für $x \to x_0-$.
Es gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ existieren und gleich sind. Dann sind alle drei Grenzwerte gleich.

Satz 3.6 Mittelwertsatz der Differential-Rechnung. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Beweis:
Spezialfall: $f(a) = f(b)$ (Satz von Rolle)
f stetig $\Rightarrow$ es existiert das Minimum m und das Maximum M auf $[a, b]$.
$m = M \Rightarrow f$ konst. $\Rightarrow f' = 0$.
$m \neq M \Rightarrow m \neq f(a)$ oder $M \neq f(a)$.

Sei $M \neq f(a) \Rightarrow \exists\, c \in (a, b)$ mit $f(c) = M \Rightarrow f(x) \leq f(c)$ $(x \in [a, b])$
$x < c : f'(c) = \lim\limits_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$
$x > c : f'(c) = \lim\limits_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$
$\Rightarrow f'(c) = 0$.

Allgemein: Setze $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) \Rightarrow g(a) = g(b) = f(a)$
$\Rightarrow \exists\, c \in (a, b)$ mit $g'(c) = 0 \Rightarrow$ Behauptung. $\square$

Anwendungen:

(1) $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x) = 0$ $(x \in I) \Rightarrow f =$const.

Denn:
$\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ gilt:

$$\exists\, c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

(2) $f, g : I \to \mathbb{R},\ f'(x) = g'(x)$ $(x \in I) \Rightarrow f = g+$const.

(3) Eine Differentialgleichung (DGL): $f'(x) = r \cdot f(x),\quad r \in \mathbb{R}$ fest.

Gesucht: Alle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die diese Differentialgleichung lösen.
Durch einsetzen stellt man fest: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = ce^{rx}$ eine Lösung.

Sei umgekehrt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung.
Für $h(x) := g(x) \cdot e^{-rx}$ gilt dann $h'(x) = g'(x)e^{-rx} - rg(x)e^{-rx} = 0$

$\Rightarrow h(x) = c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x) = ce^{rx}$

Speziell: $r = 1 : f'(x) = f(x)$

Allgemeine Lösung: $f(x) = ce^x,\ c \in \mathbb{R}$

Ergebnis: Die natürliche Exponentialfunktion exp ist durch das Anfangswertproblem (AWP)

$$f'(x) = f(x)$$

$$f(0) = 1$$

eindeutig festgelegt.

(4) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

$f'(x) \geq 0\ (x \in I)\ \Leftrightarrow f$ monoton wachsend

$f'(x) > 0\ (x \in I)\ \Rightarrow f$ streng monoton wachsend

Analog: monoton fallend und streng monoton fallend für $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$.

Denn:
f monoton wachsend $\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0\ (h \neq 0)$

$\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

Sei $f'(x) \geq 0\ (x \in I)$ und $x_1 \leq x_2 \underset{MWS}{\Rightarrow}$

$f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\ \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\geq 0} \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$

(5) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $c \in I$ heißt **lokale Extremalstelle**, wenn für ein $\varepsilon > 0$ die Funktion $f\ |_{I \cap U_\varepsilon(c)}$ in c eine globale Extremalstelle hat.

Sei f differenzierbar, $c \in I$ kein Randpunkt von I und $f'(c) = 0$. Wechselt f' an der Stelle c das Vorzeichen, so ist c lokale Extremalstelle:

$+ \to -$ lokale Maximalstelle
$- \to +$ lokale Minimalstelle

Denn:
$+ \to -$: In einer Umgebung $U_\varepsilon(c)$ von c gilt:
$f'(x) \geq 0\ (c - \varepsilon < x \leq c)$, also f monoton wachsend.
$f'(x) \leq 0\ (c \leq x < c + \varepsilon)$, also f monoton fallend.
Somit ist c eine lokale Maximalstelle.

Bemerkung: Lokale Extremalstellen können auch in Randpunkten des Definitionsintervalls liegen. Dort ist die Ableitung nicht notwendig 0. Bsp.: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $c = 1$.
Ist c eine lokale Extremalstelle aus dem Innern des Definitionsintervalls so ist $f'(c) = 0$. Aber nicht jede Nullstelle der Ableitung ist eine lokale Extremalstelle. Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $c = 0$.

(6) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar.

$f''(c) > 0,\ f'(c) = 0 \Rightarrow c$ ist lokale Minimalstelle

$f''(c) < 0,\ f'(c) = 0 \Rightarrow c$ ist lokale Maximalstelle

Denn:
$f''(c) > 0 \Rightarrow$ In einer Umgebung von c wächst f' streng monoton. Wegen $f'(c) = 0$ findet bei c ein Vorzeichenwechsel $- \to +$ statt $\Rightarrow c$ lokale Minimalstelle.

(7) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar.

$f'' > 0$ auf $I \Rightarrow$ Graph f liegt oberhalb jeder seiner Tangenten ("konvexe Funktion").

$f'' < 0$ auf $I \Rightarrow$ Graph f liegt unterhalb jeder seiner Tangenten ("konkave Funktion").

Denn:
Tangente in $x_0 \in I : y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Sei $x_0 < x \in I \Rightarrow\ \exists\, c \in (x_0, x) : f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$

$\exists\, d \in (x_0, c) : f'(c) = f'(x_0) + f''(d)(c - x_0)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{f''(d)}_{>0}\ \underbrace{(c - x_0)}_{>0}\ \underbrace{(x - x_0)}_{>0} > y(x)$$

Analog für $x_0 > x \in I$.

(8) **Regel von L'Hospital**:
Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch ein praktisches Verfahren zur Bestimmung von Grenzwerten angeben:
Viele Grenzwerte sind von der Form "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" wie etwa:

"$\frac{0}{0}$": $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}}$

"$\frac{\infty}{\infty}$": $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln x = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}$

Regel von L'Hospital:

$f, g : I \to \mathbb{R}$ seien auf einem links bzw rechts an den Punkt a anschließenden Intervall $J = (b, a)$ bzw. $J = (a, c)$ ($a = \pm\infty$ zugelassen) differenzierbar. Wir betrachten den Fall $J = (a, c)$, $a \in \mathbb{R}$.

Es sei $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$, und es liege einer der beiden Fälle vor:

(i) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ oder $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = -\infty$.

Dann ist
$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
falls der zweite Grenzwert existiert.

Analog für $J = (b, a)$ und/oder $a = \pm\infty$.

Ohne Beweis.

Beispiele:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ aber $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\cos x}{1}$ existiert nicht!

(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x} = 0$ aber $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos x}{1} = -1$. Voraussetzungen der Regel von L'Hospital sind nicht erfüllt.

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2\sqrt{x-2}}{x-1} = 0$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cos x+\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

(7) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \underset{e^x\ \mathit{stetig}}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

3.4 Taylorsche Formel und Taylorreihen

Bekannt:
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \quad \text{für } x\in\mathbb{R};$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k \quad \text{für } |x|<1.$$

Problem: Berechnung von Potenzreihenentwicklungen.

Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ $(x\in(x_0-r, x_0+r))$, wobei $r>0$ der Konvergenzradius der Reihe ist.
Wie lassen sich die Koeffizienten a_k aus f bestimmen?

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$
$f(x_0) = a_0$

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$
$f'(x_0) = a_1$
$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \dots$
$f''(x_0) = 2a_2$
$f'''(x_0) = 3!a_3$
$\vdots$
$f^{(k)}(x_0) = k!a_k$
Also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Anwendung auf Polynom p vom Grad n.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist für $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Beispiel: $p(x) = x^4 - x + 1,\ x_0 = 1.$
$p(x_0) = 1$
$p'(x) = 4x^3 - 1 \Rightarrow p'(1) = 3$
$p''(x) = 12x \Rightarrow p''(1) = 12$
$p'''(x) = 24x \Rightarrow p'''(1) = 24$
$p^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow p^{(4)}(1) = 24.$
Somit:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + 3(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 \\ &= 1 + 3(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4 \end{aligned}$$

"Entwicklung von p um die Stelle $x_0 = 1$."

Definition 3.7 *Sei $f : I \to \mathbb{R},\ x_0 \in I$, und f n-mal differenzierbar:*
$T_n(x, x_0) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ *heißt* **Taylorpolynom** *n-ter Ordnung von f um x_0.*
$R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$ *heißt* **Restglied**.
f beliebig oft differenzierbar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heißt **Taylorreihe von f um x_0.**

Bemerkung: $f^{(0)} := f$

Beispiele:

(1) Taylorreihe von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$.

$f^{(k)}(x) = e^x \ (k \in \mathbb{N}_0)$.

$f^{(k)}(0) = 1 \ (k \in \mathbb{N}_0)$.

$T_0(x,0) = 1$

$T_1(x,0) = 1 + x$

$T_2(x,0) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$

$T_3(x,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

$\vdots$

$e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ Taylorreihe um $x_0 = 0$.

(2) $f(x) = \sin x, \ x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$

$T_0(x,0) = 0$

$T_1(x,0) = T_0(x,0) + \frac{f'(0)}{1}x = x$

$T_2(x,0) = T_1(x,0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x$

$T_3(x,0) = T_2(x,0) + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3!}$

$T_4(x,0) = T_3(x,0)$

$T_5(x,0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$\vdots$

$\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1}$ Taylorreihe um $x_0 = 0$.

(3) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f für $x \neq 0$ beliebig oft differenzierbar.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0$$

Man kann zeigen:

$f^{(k)}(0) = 0 \ (k \in \mathbb{N}_0)$.

Die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ ist daher $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k = 0$.

Es gilt somit

$$f(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (x \neq 0).$$

Die Taylorreihe stellt also f **nicht** dar!

Problem: Welcher Fehler tritt auf, wenn f durch sein Taylorpolynom T_n approximiert wird?

Satz 3.8 (Taylorsche Formel.) *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und $x_0 \in I$.*
Dann existiert zu jedem $x \in I$, $x \neq x_0$, ein $\xi \in (x_0, x)$ oder $\xi \in (x, x_0)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= T_n(x, x_0) + R_n(x, x_0) \qquad \text{(Lagrangeform des Restgliedes)} \end{aligned}$$

Ohne Beweis.

Bemerkungen:

(a) ξ hängt von x_0 und x ab!

(b) $n = 0$: Mittelwertsatz

(c) Taylorreihe konvergiert gegen $f(x) \Leftrightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x, x_0)$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$

Beispiele:

(1) $f(x) = \cos x, \ x_0 = 0$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x, 0)$

mit

$R_4(x, 0) = -\frac{\sin\xi}{5!} x^5, \qquad \xi$ zwischen 0 und x

$|R_4(x, 0)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$

Für $x = 1/5$ gilt:

$\cos(1/5) = T_4(1/5, 0) + R_4(1/5, 0) = \frac{14701}{15000} + R_4(1/5, 0)$

Dabei ist der Fehler:
$|R_4(1/5, 0)| \leq \frac{1}{5^5 5!} = \frac{32}{120} 10^{-5} < 0,5 \cdot 10^{-5}$

d.h.
$\cos(1/5) = 0,9800\overline{6} + r$ mit $|r| < 0,000005$, also gilt

$0.980061 < \cos(1/5) < 0.980072$.

Allgemein gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$|R_n(x,0)| = \left|\frac{\cos^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \to 0 \ (n \to \infty),$$

d.h. $\cos x$ wird durch seine Taylorreihe in $x_0 = 0$ dargestellt.

(2) $f(x) = \ln(1+x) \ (x \in (-1,1])$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$

Sei $x_0 = 0$: Für die Taylorkoeffizienten gilt dann:

$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ (k \geq 1)$

$a_0 = f(0) = 0$

$\Rightarrow T_n(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

$R_n(x,0) = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot x^{n+1}$

(ξ zwischen 0 und x)

Sei $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 < \xi < 1$. Damit gilt:

$$|R_n(x,0)| = \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Sei $-1 < x < 0$: Hier funktioniert obige Abschätzung nicht mehr! Deshalb andere Methode:

Die Taylorreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

hat den Konvergenzradius $r = 1$, denn

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1.$$

Die Funktion

$$f(x) =: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k$$

ist auf dem Intervall $(-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar.

Setze $g(x) := f(x) - \ln(1 + x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - \tfrac{1}{1+x} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^{k-1} - \tfrac{1}{1+x} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 0 \end{aligned}$$

Also: $g(x) = \text{const.}\ (x \in (-1, 1))$

$g(0) = f(0) - \ln 1 = 0 \Rightarrow \text{const.} = 0$

$\Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \ln(1 + x)$.

Insgesamt ist

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k \quad \text{für } x \in (-1, 1].$$

Speziell für $x = 1$:

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{(Leibnizsche Reihe)}$$

4 Integralrechnung für Funktionen einer Variablen

4.1 Bestimmte Integrale

Motivation:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Probleme:
1.) Wann gibt es eine Stammfunktion, d.h. ein $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ $(x \in [a, b])$?
2.) Sei $f \geq 0$. Wann und wie kann man der "Fläche unter dem Graph von f" eine sinnvolle Bedeutung geben?
Diese Fragen führen auf den Begriff des Integrals.

Konstruktion eines Integrals:

1. Zerlegung von $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle:

   $Z : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$

Maß für die Feinheit (Grobheit) der Zerlegung Z:

$$d(Z) = \max_{k=1,\dots,n} |x_k - x_{k-1}|$$

"maximale Intervallänge".

2. In jedem Intervall wird eine beliebige Zwischenstelle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gewählt. Man erhält so einen Vektor $z = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und definiert die zugehörige **Riemannsumme**:

$$S(f, Z, z) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

3. Bilde Riemannsummen $S(f, Z_l, z_l)$ für eine Folge (Z_l) immer feiner werdender Zerlegungen, d.h.

$$d(Z_l) \to 0 \ (l \to \infty),$$

mit Zwischenstellen z_l und setze

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{l\to\infty} S(f, Z_l, z_l).$$

Schwierigkeiten:
1. Grenzwert muss nicht existieren.
2. Verschiedene Folgen (Z_l) mit Zwischenstellen (z_l) können verschiedene Grenzwerte haben.

Definition 4.1 *Wenn für jede Folge (Z_l) von Zerlegungen mit $\lim_{l\to\infty} d(Z_l) = 0$ und jede Wahl von Zwischenstellen (z_l) der Grenzwert*

$$\lim_{l\to\infty} S(f, Z_l, z_l)$$

existiert und derselbe ist, dann heißt f **Riemann-integrierbar** *auf $[a, b]$, und*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{l\to\infty} S(f, Z_l, z_l)$$

heißt das (bestimmte) **Riemann-Integral** *von f über $[a, b]$.*

Schreib-und Sprechweisen:
a, b Integrationsgrenzen
f Integrand
x Integrationsvariable

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

Achtung: Nicht jede Funktion ist integrierbar!

Beispiele:

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$S(f, Z, z) = 1$, wenn alle $\xi_k \in \mathbb{Q}$

$S(f, Z, z) = 0$, wenn alle $\xi_k \notin \mathbb{Q}$

Also: $\int\limits_0^1 f(x)dx$ existiert nicht.

(b) Jede auf $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktion ist beschränkt. Also ist z.B. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ $(x \in (0,1])$, $f(0) = 0$ nicht integrierbar.

Satz 4.2 *Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig oder stückweise stetig oder monoton ist, dann ist f integrierbar auf $[a, b]$.*

Stückweise stetig:
Es existieren endlich viele Zahlen $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$, sodass

$$f\,|_{(a_{k-1}, a_k)}$$

stetig ist und die Grenzwerte

$$\lim_{x \to a_{k-1}+} f(x), \quad \lim_{x \to a_k-} f(x)$$

existieren $(k = 1, \ldots, m)$.

Beweis für monotones f: O.B.d.A. sei f monoton wachsend. Wir betr. eine Zerlegung

$$Z : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

mit Zwischenstellen z. Es gilt:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}_{U(f,Z) \text{ Untersumme}} \leq S(f, Z, z) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})}_{O(f,Z) \text{ Obersumme}}$$

Eine Zerlegung Y heißt **Verfeinerung** der Zerlegung Z wenn $Z \subseteq Y$ gilt. Sind $Z, \widetilde{Z}$ Zerlegungen so ist $Y := Z \cup \widetilde{Z}$ eine Zerlegung die Verfeinerung von Z und von $\widetilde{Z}$ ist. Es gilt

$$U(f, Z) \leq U(f, Z \cup \widetilde{Z}) \leq O(f, Z \cup \widetilde{Z}) \leq O(f, \widetilde{Z})$$

Daher existieren

$$\sup\{U(f, Z) : Z\} =: \alpha \leq \beta := \inf\{O(f, \widetilde{Z}) : \widetilde{Z}\}.$$

Nun sei (Z_l) eine Zerlegungsfolge mit $d(Z_l) \to 0$ $(l \to \infty)$, und (z_l) eine zugehörige Folge von Zwischenstellen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
0 \le O(f, Z_l) - U(f, Z_l) &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\
&\le d(Z_l) \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\
&= d(Z_l)(f(b) - f(a)) \to 0 \ (l \to \infty)
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\lim_{l \to \infty} U(f, Z_l) = \alpha = \beta = \lim_{l \to \infty} O(f, Z_l)
$$

also insbesondere $\alpha = \beta = \lim\limits_{l \to \infty} S(f, Z_l, z_l)$. □

Eigenschaften des Integrals:

$f : I \to \mathbb{R}$, I Intervall, $a, b \in I$.

(1) f konstant, $f(x) = c \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = c(b-a)$

(2) Man definiert für $a = b : \int\limits_a^b f(x)dx := 0$

$a > b : \int\limits_a^b f(x)dx := -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Dann gilt für alle $a, b, c \in I$:

$$
\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx
$$

(3) $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch $f \pm g$, cf integrierbar und es gilt

$$
\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx
$$

$$
\int_a^b cf(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx
$$

"Linearität"

Denn (z.B. für $f + g$): Für jede Zerlegung Z mit Zwischenstellen z gilt

$$
\begin{aligned}
S(f+g, Z, z) &= \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) + g(\xi_k))(x_k - x_{k-1}) \\
&= S(f, Z, z) + S(g, Z, z)
\end{aligned}
$$

Damit gilt für jede Folge (Z_l) mit $d(Z_l) \to 0$ und Zwischenstellen (z_l)

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty} S(f+g, Z_l, z_l) &= \lim_{l\to\infty} (S(f, Z_l, z_l) + S(g, Z_l, z_l)) \\ &= \lim_{l\to\infty} S(f, Z_l, z_l) + \lim_{l\to\infty} S(g, Z_l, z_l) \\ &= \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

d.h. $\lim\limits_{l\to\infty} S(f+g, Z_l, z_l)$ existiert und ist unabhängig von der Wahl von (Z_l) und (z_l).

(4) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \le g(x)$ $(x \in [a,b]) \Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx \quad (\text{“Monotonie''})$$

Denn: Für jede Zerlegung Z mit Zwischenstellen z gilt

$$\begin{aligned}S(f, Z, z) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\ge 0} \\ &\le \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = S(g, Z, z).\end{aligned}$$

(5) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow |f|$ integrierbar und

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

Denn:

$$\pm \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \pm f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

Auf den Beweis, dass $|f|$ integrierbar ist, verzichten wir.

(6) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $m \le f(x) \le M$ $(x \in [a,b])$ $\Rightarrow m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Wir wenden (6) auf stetige Funktionen an.

Satz 4.3 *(Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $c \in [a,b]$ mit*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Beweis: f stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ es existieren das Minimum und Maximum von f auf $[a,b]$, d.h. es existieren $x_m, x_M \in [a,b]$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \ (x \in [a,b])$$

$$f(x_M) \geq f(x) \ (x \in [a,b])$$

$$\underset{(6)}{\Rightarrow} f(x_m) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_M)$$

$\underset{(ZWS)}{\Rightarrow}$ $\exists\, c$ zwischen x_m, x_M, also $c \in [a,b]$ mit $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. □

4.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wie berechnet man nun möglichst einfach bestimmte Integrale? Für stetige Funktionen f ist dies einfach, wenn man eine Stammfunktion F kennt, für die also $F' = f$ gilt. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b\,.$$

Beispiel:

$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = ?$

$F(x) = \ln x \ (x > 0);\ F'(x) = \frac{1}{x}$

also

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Wir kennen schon folgende Stammfunktionen:

Funktion	Stammfunktion
$\frac{1}{x}\ (x > 0)$	$\ln x$
$e^{ax},\ a \neq 0$	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$x^a\ (x > 0),\ a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (x \in (-1,1))$	$\arcsin x$

Satz 4.4 *Hauptsatz (I. Teil): Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, I Intervall, $a \in I$. Dann ist*

$$F : I \to \mathbb{R}$$

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$$

eine Stammfunktion von f, d.h.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x) \quad (x \in I).$$

Beweis:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)dt \underset{MWS}{=} f(c_h), \quad c_h \text{ zwischen } x \text{ und } x+h$$

also

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) \underset{f \text{ stetig}}{=} f(x)$$

□

Satz 4.5 *Hauptsatz (II. Teil): Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Beweis:

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

$$0 = \int\limits_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

$$\underset{x=b}{\Longrightarrow} \int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

□

Bemerkung: Jede Stammfunktion F von f nennt man ein **unbestimmtes Integral** und schreibt $\int f(x)dx$.

Oft sieht man folgende Schreibweise in Formelsammlungen:

$$\text{z.B.} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C,$$

manchmal auch unter Weglassen der Konstanten C.

Folgerung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar $\Rightarrow \int\limits_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Beispiele:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx &= \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx \\ &= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

4.3 Technik des Integrierens

Partielle Integration, Substitution, rationale Funktionen, Potenzreihen

(1) Partielle Integration:

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)dx.$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

(Voraussetzung: $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Beweis: Produktregel und Hauptsatz)

Beispiele:

(a)

$$\begin{aligned} \int_a^b xe^x dx &= [xe^x]_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx \\ &= [xe^x]_a^b - [e^x]_a^b \\ &= (be^b - ae^a) - (e^b - e^a) \\ &= (b-1)e^b - (a-1)e^a \end{aligned}$$

(b)

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int 1(-\cos x) dx$$

also

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(t) dt &= \int \cos(t)\cos(t) dt = \\
&= \cos(t)\sin(t) - \int -\sin(t)\sin(t) dt \\
&= \cos(t)\sin(t) + \int \sin^2(t) dt \\
&= \cos(t)\sin(t) + \int (1-\cos^2(t)) dt
\end{aligned}$$

also

$$2\int \cos^2(t) dt = \cos(t)\sin(t) + t + \widetilde{C}$$

$$\int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2}\cos(t)\sin(t) + \frac{t}{2} + C$$

(2) Substitution bei unbestimmten Integralen

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ seien Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $g : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(J) \subseteq I$.
1.) Dann gilt auf J:

$$\int f(g(t))g'(t) dt = \left(\int f(x) dx\right) |_{x=g(t)} \ .$$

Denn: f besitzt auf I eine Stammfunktion F und $F(g(t))$ ist eine Stammfunktion von $f(g(t))g'(t)$ auf J.
2.) Ist g zusätzlich streng monoton, so gilt auf I

$$\int f(x) dx = \left(\int f(g(t))g'(t) dt\right) |_{t=g^{-1}(x)} \ .$$

Merkregel:

$$\int f(x) dx \overset{(1)\ Substitution}{=} \int f(g(t))g'(t) dt$$

$$\left.\begin{array}{c} x = g(t) \\ \frac{dx}{dt} = g'(t) \\ dx = g'(t) dt \end{array}\right] \quad \text{formal!}$$

$$\underset{(2)\ Integralberechnung}{=} H(t) + C$$

$$\underset{(3)\ R\ddot{u}cksubstitution\ t=g^{-1}(x)}{=} H(g^{-1}(x)) + C$$

Beispiele:

(a)

$$\int \frac{\cos t}{e^{\sin t}}dt \underset{\substack{x=\sin t\\ dx=\cos t dt}}{=} \int \frac{1}{e^x}dx$$

$$= \int e^{-x}dx$$

$$= -e^{-x} + C$$

$$= -e^{-\sin t} + C$$

(b)

$$\int \frac{1}{2+3x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2}dx$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}}x = t$$
$$\sqrt{\tfrac{3}{2}}dx = dt$$
$$dx = \sqrt{\tfrac{2}{3}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(t) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}x) + C$$

(3) Substitution bei bestimmten Integralen

Satz 4.6 *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, besitzt also eine Stammfunktion F, und $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar mit $g([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$ und $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.*
Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = [F(g(t))]_\alpha^\beta$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0 \text{ fest})$$

$$y_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$y_2 = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Fläche:

$$A = 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

Substitution: $\qquad x = a\sin(t) \quad (= g(t),\ g : [-\pi/2, \pi/2] \to [-a, a])$

$$dx = a\cos(t)dt$$

$$-a = g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)dt$$

$$= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt$$

$$= 2ab \left[\left(\frac{1}{2}\cos(t)\sin(t) + \frac{t}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi$$

Speziell: **Kreis:** $a = b = r$, $A = \pi r^2$.

(4) Integration rationaler Funktionen

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \qquad p, q \text{ Polynome.}$$

Methode: Partialbruchzerlegung

Schritt 0: Falls Grad $p \geq$ Grad q Division mit Rest

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_0(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

Grad $p_1 <$ Grad q.

Beispiel:

$f(x) = \frac{x^4 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x - 2} = x + \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 - 3x - 2}$

Betrachte also $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, Grad $p <$ Grad q, p, q keine gemeinsame Nullstelle.

Schritt 1: Zerlegung von $q(x)$ in Linearfaktoren und nichtzerlegbare quadratische Faktoren. (Bea.: Dies ist i.a. nicht durchführbar.)

Beispiel:

$q(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$

Schritt 2: Partialbruchzerlegung.
Ansatz am **Beispiel** demonstriert:

$$q(x) = (x-x_1)(x-x_2)^3 \underbrace{(x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)^2}_{\text{unzerlegbar über } \mathbb{R}}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \frac{B_3}{(x-x_3)^3} + \frac{Cx+D}{x^2+a_1x+b_1} + \frac{E_1x+F_1}{x^2+a_2x+b_2} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+a_2x+b_2)^2}$$

mit Konstanten $A, B_1, \ldots, E_2, F_2$ (ohne Begründung).

Obiges Beispiel:

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B}{x-2}.$$

Bestimme A_1, A_2, B:

$2x^2+x+1 = A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-2) + B(x+1)^2$

Ausrechnen und Koeffizientenvergleich oder schneller: Geeignete Werte einsetzen.

$x = -1: \quad 2 = A_2(-1-2) \Rightarrow A_2 = -\frac{2}{3}$

$x = 2: \quad 11 = B(2+1)^2 \Rightarrow B = \frac{11}{9}$

$x = 0: \quad 1 = -2A_1 - 2A_2 + B \Rightarrow A_1 = \frac{7}{9}$

Schritt 3: Integration der einzelnen Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k>1)$$

$$\int \frac{Cx+D}{x^2+ax+b}dx = \ldots \quad \text{Tabellen!}$$

$$\text{z.B.} \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C.$$

Beispiele:

(1)

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x^3-3x-2}dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \frac{11}{9}\int \frac{1}{x-2}dx$$

$$= \underbrace{\frac{7}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{11}{9}\ln|x-2|}_{(\,*\,)} + C$$

$$\int \frac{x^4-x^2-x+1}{x^3-3x-2}dx = \frac{x^2}{2} + (\,*\,) + \mathrm{C}$$

(2)

$$\int \frac{1}{3x^2+2x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{2}{9}(1+\frac{9}{2}(x+\frac{1}{3})^2)}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dx}{1+\frac{9}{2}(x+\frac{1}{3})^2}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\sqrt{\frac{2}{9}}dy}{1+y^2} \qquad \begin{aligned} \sqrt{\tfrac{9}{2}}(x+\tfrac{1}{3}) &= y \\ \sqrt{\tfrac{9}{2}}dx &= dy \\ dx &= \sqrt{\tfrac{2}{9}}dy \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\arctan y + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{9}{2}}(x+\frac{1}{3})\right) + C$$

(5) Integration von Potenzreihen

Viele Funktionen wie z.B.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$e^{-x^2}$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2(x)},\ k^2 < 1$$

besitzen nach dem Hauptsatz eine Stammfunktion, sind aber nicht elementar integrierbar, d.h. ihre Stammfunkionen können nicht durch eine endliche Kombination elementarer Funktionen ausgedrückt werden.

Hier helfen die Potenzreihen weiter!

Satz 4.7 *Gilt* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *mit Konvergenzradius* $r > 0$*, so ist*

$$\int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + C$$

mit demselben Konvergenzradius r*.*

Beweis: Gliedweise Differentiation.

Beispiele:
Integralsinus

$$Si(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} t^{2k+1} \quad + C$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \dots) + C$$

Fehlerfunktion

$$\text{erf }(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - + \dots\right) dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots\right) + C$$

4.4 Uneigentliche Integrale

Beispiele:
Integrationsgrenzen “∞” oder “$-\infty$”:

$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx, \ s \in \mathbb{R}$

$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Integrand unbeschränkt:

$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^s} dx$

Zurückführung auf den Fall eigentlicher Integrale:
(1) Integrationsgrenzen "$\pm\infty$"

$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sei integrierbar auf $[a, b]$ für jedes $b > a$.

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Sprechweisen: Uneigentliches Integral "existiert" oder ist "konvergent", falls obiger Grenzwert existiert. Andernfalls nennt man das uneigentliche Integral "divergent".

Analog:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int\limits_c^b f(x)dx$$

($c \in \mathbb{R}$ beliebig, fest)

Beispiele:

(1) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{für } s > 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$

Denn:

$$\int\limits_1^b \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} [\ln(x)]_1^b = \ln b & \text{für } s = 1 \\ [\frac{1}{-s+1} x^{-s+1}]_1^b = \frac{1}{(1-s)b^{s-1}} - \frac{1}{1-s} & \text{für } s \neq 1 \end{cases}$$

(2) $\int\limits_{-\infty}^0 e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} (1 - e^a) = 1$

(3) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} ex = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} (\underbrace{\arctan(0)}_{0} - \arctan(a)) + \lim\limits_{b\to\infty} (\arctan(b) - \underbrace{\arctan(0)}_{0})$

$= \pi$

Achtung:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx}_{\text{divergent}} \neq \underbrace{\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} x^3 dx}_{=0}$$

(2) Integrand unbeschränkt

f auf $[a,b)$ unbeschränkt, aber auf jedem Teilintervall $[a,c], a < c < b$ integrierbar.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx \qquad \text{(falls existent)}$$

Analog falls f unbeschränkt auf $(a,b]$ bzw. (a,b)

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$$

bzw.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a+} \int_c^d f(x)dx + \lim_{c\to b-} \int_d^c f(x)dx$$

$$(d \in (a,b) \text{ beliebig, fest})$$

Beispiele:

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \lim_{c\to 1^-} (\arcsin(c) - \underbrace{\arcsin(0)}_{0}) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s} & \text{für } s < 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

denn:

$$\int_c^1 \frac{1}{x^s}dx = \begin{cases} -\ln c & \text{für } s = 1 \\ \frac{1}{1-s} - \frac{1}{(1-s)c^{s-1}} & \text{für } s \neq 1 \end{cases}$$

Bemerkung: $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^s}dx$ existiert für **kein** $s \in \mathbb{R}$.

Das Majorantenkriterium:
Wir betrachten nur den Fall $\int_a^\infty f(x)dx$, die anderen Fälle gehen entsprechend.
Analog wie bei Reihen definiert man

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ konvergiert absolut} \quad :\Longleftrightarrow$$

$$\int_a^\infty |f(x)|dx \text{ konvergiert,}$$

und wie bei Reihen gilt: Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.
Es seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, b]$ für jedes $b > a$. Gilt dann $|f(x)| \leq g(x)$ $(x \geq a)$ und ist $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergent, so konvergiert $\int_a^\infty f(x)dx$ absolut. (Ohne Beweis.)

Bsp.:

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}dx \text{ konvergiert,}$$

denn

$$|f(x)| = f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad (x \geq 1),$$

und

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx \text{ konvergiert.}$$

4.5 Trigonometrische Polynome und Fourierreihen

In den Anwendungen treten häufig periodische Vorgänge auf, die sich nach einer festen Periode $T > 0$ wiederholen. Sie werden durch Funktionen beschrieben, für die gilt:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x),\ T > 0.$

Beispiel:

$$f(x) = \sin kx,\ k \in \mathbb{N},$$
$$g(x) = \cos kx,\ k \in \mathbb{N},$$
$$\text{Periode } T = 2\pi.$$

Bemerkung: Hat f die Periode T, so hat

$$\widetilde{f}(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

die Periode 2π:

$$\widetilde{f}(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right)$$

$$= f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = \widetilde{f}(x).$$

Hat umgekehrt g die Periode 2π, so hat

$$\widetilde{g}(x) := g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

die Periode T.

Spezielle 2π-periodische Funktionen:

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

"trigonometrisches Polynom"

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

"trigonometrische Reihe"

Bedeutung:

Für die Approximation periodischer Funktionen sind Potenzreihen weniger geeignet, da sie nur lokal approximieren. Kann man jedoch eine 2π-periodische Funktion durch ein trigonometrisches Polynom oder eine trigonometrische Reihe in $[0, 2\pi]$ approximieren, so gilt diese Approximation in ganz $\mathbb{R}$.

Problem:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch, stetig (stückweise stetig).

Wir suchen ein trigonometrisches Polynom p_n, das f auf $[0, 2\pi]$ "möglichst gut" approximiert. Wir wollen also den "Abstand" $\|f - p_n\|$ möglichst klein halten. Dazu benötigen wir eine geeignete Abstandsfunktion auf dem Vektorraum $C([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig } \}$.

Möglichkeit:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

ist ein **Skalarprodukt** auf $C([0, 2\pi])$.

Zugehörige Norm: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$

Zugehöriger Abstand: $\|f - g\| = \sqrt{\langle f - g, f - g\rangle}$

Lösung:

Sei $U = [1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx]$.

Bea.: U ist ein $2n + 1$-dimensionaler UVR des unendlichdimensionalen Vektorraums $C([0, 2\pi])$. Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$$

bilden eine ONB von U (vgl. Übungen).

Lineare Algebra: Die Orthogonalprojektion p_n von f auf U ist diejenige Funktion, für die

$$\|f-g\|$$

minimal wird unter den Funktionen $g \in U$, d.h. $\|f-p_n\| \leq \|f-g\|$ $(g \in U)$.

Orthogonalprojektion von f auf U:

$$p_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x +$$

$$+\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x + \cdots + \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx +$$

$$+\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx.$$

Also

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

mit

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\langle f, 1\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

d.h.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun kann man den Rahmen der stetigen Funktionen wieder verlassen und obige Koeffizienten a_k, b_k für jede 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten für die obige Integrale existieren (dies ist der Fall falls f auf $[0, 2\pi]$ integrierbar ist).

Bemerkung: f gerade, d.h. $f(x) = f(-x) \Rightarrow$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx \ (k = 0, 1, \ldots),$$

$$b_k = 0 \qquad\qquad (k = 1, 2, \dots),$$

denn für $g(x) = f(x)\cos kx$ gilt $g(x) = g(-x)$ und

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_0^{\pi} g(x)dx + \int_\pi^{2\pi} g(x)dx$$

$$\int_\pi^{2\pi} g(x)dx = \int_\pi^{2\pi} g(x-2\pi)dx \qquad (2\pi\text{-periodisch})$$

$$= \int_\pi^{0} -g(-t)dt \qquad \text{Subst.: } x - 2\pi = -t; dx = -dt$$

$$= \int_0^{\pi} g(t)dt.$$

Für $g(x) = f(x)\sin kx$ gilt $g(-x) = -g(x)$ und daraus folgt mit derselben Rechnung $\int\limits_0^{2\pi} g(x)dx = 0$.

f ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)\cos kx$ ungerade, $f(x)\sin kx$ gerade $\Rightarrow a_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, $b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

f gerade $\Rightarrow b_k = 0$ $(k = 1, \dots, n)$.

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}x\sin kx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin kx dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k^2}\cos kx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \ge 1 \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \ge 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \pi$$

Sei n ungerade. Dann ist

$$p_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)$$

Damit gilt $\|f - p_n\| \leq \|f - g\|$ für jedes trigonometrische Polynom $g \in [1, \cos x, \sin x, \ldots \cos nx, \sin nx]$.

Definition 4.8 *Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[0, 2\pi]$ integrierbar.*
Die Zahlen

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$$

heißen **Fourierkoeffizienten von** f.

Die formal gebildete Reihe

$$FR\ (f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

heißt **Fourierreihe von** f. *(Fourier 1768-1830)*

Problem:
Wann wird eine Funktion f durch ihre FR dargestellt?

Voraussetzung: Sei f auf $[0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar, d.h. ihre Ableitung ist stückweise stetig ergänzbar.

Satz 4.9 *(Fourier). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und stückweise stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe $FR\ (f, x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, und es gilt*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x-} f(t) + \lim_{t \to x+} f(t)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \;\; FR\ (f, x)$$

mit den Fourierkoeffizienten a_k, b_k. Insbesondere gilt $f(x) = FR\ (f, x)$ an jeder Stelle an der f stetig ist.

Ohne Beweis.

Zusatz: Hat f die Periode T, so gilt analog

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x-} f(t) + \lim_{t \to x+} f(t)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)$$

mit Fourierkoeffizienten

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Zurück zu obigem Beispiel (Sägezahnfunktion):
f erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.9. Also

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5 Differentialrechnung für Funktionen mehrere Variablen

5.1 Partielle Ableitungen

Wir betrachten eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$, also

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Definitionen: Partielle Ableitung von f nach der i-ten Variablen x_i an der Stelle x:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

D.h. man betrachtet die Funktion $t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$, mit $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fest und bildet die Ableitung dieser Funktion nach der Variablen t.

Bemerkung: Um $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ für jedes $i = 1, \dots, n$ erklären zu können, muss mit $x \in U$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ auch $x + he_i \in U$ gelten, wenn $h \in \mathbb{R}$ hinreichend klein ist. Dies erreichen wir durch die Forderung, daß $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine **offene** Menge ist, d.h.

$$\forall\, x \in U\ \exists U_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\} :\ U_\delta(x) \subseteq U.$$

Sprechweisen:

f **partiell differenzierbar in** $x \in U$:
$:\Leftrightarrow$ alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ existieren.

f **partiell differenzierbar in** U: $\Leftrightarrow$ f partiell differenzierbar für alle $x \in U$.

f **stetig partiell differenzierbar in** U: $\Leftrightarrow$ f ist partiell differenzierbar in U und $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sind stetig in U.

Schreibweisen: $f_{x_i} := \partial_i f := D_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Beispiel 1:
$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3,\ U = \mathbb{R}^2$.
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$.
$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2^2$.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ sind selbst wieder partiell differenzierbar:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 2x_2) = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 2x_2) = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 3x_2^2) = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 3x_2^2) = 6x_2$$

Allgemeine Schreibweise für partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := f_{x_i x_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

(Zuerst nach x_i ableiten, dann nach x_j!)

Man nennt f in U zweimal (stetig) partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in U existieren (und stetig sind). Analog definiert man partielle Ableitungen k-ter Ordnung sowie k-mal oder beliebig oft (stetig) partiell differenzierbar. Schreibweise für höhere Ableitungen: Z.B.

$$f_{x_1x_2x_3x_1x_1} = \frac{\partial^5 f}{\partial x_1^2 \partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}$$

Wir fassen die partiellen Ableitungen 2. Ordnung zu einer Matrix zusammen:

$$H_f(x) := ((f_{x_i x_j}(x)\ )) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \ldots & f_{x_1x_n}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & \ldots & f_{x_2x_n}(x) \\ \vdots & & \\ f_{x_nx_1}(x) & \ldots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Sie heißt **Hesse-Matrix** von f an der Stelle $x \in U$.

Beispiel 1:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & f_{x_2x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix H_f ist symmetrisch. Wann dies der Fall ist, besagt der folgende Satz.

Satz 5.1 *(Satz von Schwarz.) Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei in U zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$:*

$$f_{x_ix_j}(x) = f_{x_jx_i}(x) \quad (x \in U).$$

Bemerkung: Die Voraussetzung der Stetigkeit der 2. partiellen Ableitungen kann nicht weggelassen werden (vgl. Übungen!).

Anwendung: Lokale Extrema

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hat f an der Stelle $x \in U$ ein **lokales Minimum (Maximum)**, d.h.

$$\exists\, U_\delta(x) \subseteq U \ \forall y \in U_\delta(x) : \ f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(y),$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0.$$

(Gleichungssystem mit n Unbekannten, meist nicht linear!)

Schreib- und Sprechweise:

$$\operatorname{grad} f(x) := (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

heißt der **Gradient** von f an der Stelle x. Ist also $x \in U$ ein lokales Extremum, so ist der Gradient an dieser Stelle $0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Die Funktion $t \mapsto f(t, x_2, \dots, x_n)$ hat an der Stelle $t = x_1$ ein lokales Minimum (Maximum), also ist die Ableitung dort $= 0$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0$. Analog für die anderen partiellen Ableitungen. $\square$

Ein Punkt $a \in U$ mit $\operatorname{grad} f(a) = 0$ heißt **kritischer Punkt**. Unter welchen Voraussetzungen ein kritischer Punkt lokale Minimal-(Maximal-)stelle ist, besagt der folgende Satz.

Satz 5.2 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar, und sei $a \in U$ ein kritischer Punkt. Dann gilt:*

(a) Ist $H_f(a)$ positiv definit, so ist a lokale Minimalstelle.

(b) Ist $H_f(a)$ negativ definit, so ist a lokale Maximalstelle.

(c) Ist $H_f(a)$ indefinit, so ist a keine Extremalstelle.

Zur Erinnerung an Teil I der Vorlesung:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, dann sind alle Eigenwerte reell.

A heißt positiv definit (negativ definit), wenn für alle $x \neq 0$ gilt

$$x^T Ax > 0 \quad (x^T Ax < 0)$$

A heißt indefinit $\Leftrightarrow \exists\, x, y \neq 0 : x^T Ax < 0,\ y^T Ay > 0$.
A negativ definit $\Leftrightarrow -A$ positiv definit.
Daher:
A negativ definit $\Leftrightarrow$ alle EW von $-A$ sind positiv $\Leftrightarrow$ alle EW von A sind negativ.
Oder:
A negativ definit $\Leftrightarrow$ alle Unterdeterminanten von $-A$ sind positiv

$$\Leftrightarrow -\alpha_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{vmatrix} > 0 \ldots$$

$\Leftrightarrow$ die Unterdeterminanten von A wechseln das Vorzeichen beginnend mit **Minus**, also

$$\alpha_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} < 0 \ldots$$

Die Matrix A ist genau dann indefinit, wenn sie positive und negative Eigenwerte besitzt. Sind z.B. $\mu > 0$ und $\lambda < 0$ EWe von A und x, y jeweils zugehörige Eigenvektoren, so gilt:

$$x^T Ax = \mu x^T x > 0, \quad y^T Ay = \lambda y^T y < 0.$$

Beispiel 2:
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 - 3y^2 - z^2 + 2yz - x + 2y + 2z + 4$
$f_x(x, y, z) = x^2 - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow x = \pm 1$
$f_y(x, y, z) = -6y + 2z + 2 = 0$
$\qquad \Leftrightarrow y = 1, z = 2$
$f_z(x, y, z) = -2z + 2y + 2 = 0$
$a_1 = (1, 1, 2)$ und $a_2 = (-1, 1, 2)$ sind kritische Punkte.

Hesse-Matrix:
$f_{xx}(x,y,z) = 2x, \quad f_{xy}(x,y,z) = 0, \quad f_{xz}(x,y,z) = 0$
$f_{yy}(x,y,z) = -6, \quad f_{yz}(x,y,z) = 2$
$f_{zz}(x,y,z) = -2$

$$H_f(a_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \ H_f(a_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$H_f(a_1)$ ist indefinit (EWe ausrechnen).

$H_f(a_2)$ ist negativ definit: $-2 < 0$, $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} > 0$, $\det H_f(a_2) < 0$.

Ergebnis: a_1 ist keine Extremalstelle, a_2 ist lokale Maximalstelle.

Bemerkung: Satz 5.2 wird besonders einfach für den Fall, dass $U \subseteq \mathbb{R}^2$:
$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar, und $a \in U$ sei ein kritischer Punkt.
Dann gilt

(a) $f_{x_1x_1}(a) > 0, \ \det H_f(a) > 0 \Rightarrow a$ lokale Minimalstelle

(b) $f_{x_1x_1}(a) < 0, \ \det H_f(a) > 0 \Rightarrow a$ lokale Maximalstelle

(c) $\det H_f(a) < 0 \Rightarrow a$ keine Extremalstelle (a heißt dann **Sattelpunkt**)

(d) Im Fall $\det H_f(a) = 0$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiel 3:

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$ (vgl. Bsp. 1)
Kritische Punkte:
$$\left.\begin{aligned} f_{x_1}(x_1,x_2) = 0 &\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ f_{x_2}(x_1,x_2) = 0 &\Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3x_2^2 - 2x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_2 = 0, \ x_1 = 0$ oder $x_2 = \frac{2}{3}, \ x_1 = -\frac{2}{3}$.

$a_1 = (0,0), \ a_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \ H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6x_2 \end{pmatrix}$

damit:
$f_{x_1x_1}(a_1) = 2 > 0$
$\det H_f(a_1) = -4 < 0$, also a_1 Sattelpunkt.

$f_{x_1x_1}(a_2) = 2 > 0$
$\det H_f(a_2) = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - 4 = 4 > 0$, also a_2 lokale Minimalstelle.

(b) $f(x,y) = x^2y^2$
$f_x(x,y) = 2xy^2, \ f_{xy}(x,y) = 4xy, \ f_{xx}(x,y) = 2y^2$
$f_y(x,y) = 2x^2y, \ f_{yy}(x,y) = 2x^2$
$\Rightarrow (0,0)$ ist kritischer Punkt (bea. es gibt noch viele andere; jeder Punkt der Form $(x,0)$ oder $(0,y)$ ist kritischer Punkt).

Wegen $\det H_f(0,0) = 0$ ist obiger Satz nicht anwendbar. Offensichtlich ist aber $(0,0)$ lokale Minimalstelle (sogar globale).

Anwendung: Ausgleichsrechnung

Gegeben seien $n \geq 2$ Messdaten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ für Größen x, y zwischen denen ein linearer Zusammenhang

$$y(x) = ax + b$$

besteht. Die $x_1, \ldots, x_n$ sind paarweise verschieden. Gesucht ist eine Gerade, die am "besten" den Meßdaten angepasst ist (Ausgleichsgerade, Regressionsgerade).

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (nach Gauß):

$\Delta y_i := y(x_i) - y_i = ax_i + b - y_i$ "Fehler"

$\sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2$ soll minimal sein!

Also: Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$f(a, b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

minimal?

Kritischer Punkt:

$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0$

$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0$

Dies ergibt ein LGS für die Unbekannten a, b:

$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a + n \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$

Determinante D der zugehörigen Matrix:

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2.$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sind l.u., also gilt in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung das $<$-Zeichen:

$$\underbrace{|\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle|}_{|\sum_{i=1}^{n} x_i|} < \underbrace{\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \| \cdot \| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \|}_{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{n}}$$

$\Rightarrow D > 0$, d.h. das LGS ist eindeutig lösbar. Es gibt also **genau einen** kritischen Punkt (a,b). Es gilt:
$f_{aa}(a,b) = 2\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$
$\det H_f(a,b) = \begin{vmatrix} 2\sum_{i=1}^n x_i^2 & 2\sum_{i=1}^n x_i \\ 2\sum_{i=1}^n x_i & 2n \end{vmatrix} = 4D > 0$
$\Rightarrow f$ hat in (a,b) ein lokales Minimum. Durch zusätzliche Untersuchungen kann man zeigen, dass (a,b) ein globales Minimum ist.

Beispiel 4:

5 Messungen

x	0	1	-1	-2	2
y	3	5	0	-1	4

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 10 \\ \sum_{i=1}^5 y_i = 11 \\ \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{LGS} \quad \begin{array}{l} 10\cdot a + 0\cdot b = 15 \\ 0\cdot a + 5\cdot b = 11 \end{array}$$

$\Rightarrow a = \frac{3}{2},\ b = \frac{11}{5}$
$\Rightarrow$ Ausgleichsgerade: $y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{5}$.
Analog für Ausgleichsparabeln: $y(x) = ax^2 + bx + c$.

5.2 Gradienten, Vektorfelder, Stammfunktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.
Dann können wir eine neue Funktion definieren:

$$\mathrm{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto (f_{x_1}(x) \dots f_{x_n}(x)).$$

Sie heißt auch das Gradientenfeld von f.

Weitere Schreibweise:

$$\nabla f(x) \text{ “Nabla” } f.$$

Beispiel 5:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x\cos y + e^y$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos y$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin y + e^y$
$\mathrm{grad} f(x,y) = (\cos y, -x\sin y + e^y)$.

Gradientenfelder sind Beispiele für Vektorfelder, d.h. für Abbildungen der Form

$g : U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen)
$g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$

Anschauliche Deutung: Pfeil mit Fußpunkt x. Z.B. Kraftfelder, Geschwindigkeitsfelder.

Problem:

Ist jedes Vektorfeld g auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Gradient einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$?

Gilt $g = \operatorname{grad} f$, so heißt f **Stammfunktion von** g und g heißt ein **Gradientenfeld**.

Integrabilitätsbedingungen:

Sei $g : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld, d.h. die Funktionen $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ sind stetig partiell differenzierbar.

Dann gilt:

$f : U \to \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von $g \underset{Def}{\Leftrightarrow} g = \operatorname{grad} f$

$\Leftrightarrow (g_1(x), \ldots, g_n(x))) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g_i(x) \ (i = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = f_{x_i x_j}(x) \underset{S.v.Schwarz}{=} f_{x_j x_i}(x) = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \ (i, j = 1, \ldots, n).$$

Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \quad (i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j).$$

Man erhält also $\binom{n}{2}$ Bedingungen!

$n = 2 : 1$ Bedingung

$n = 3 : 3$ Bedingungen

Die Integrabilitätsbedingungen sind auch hinreichend, falls der Definitionsbereich U von g zusätzliche Eigenschaften hat. Anschaulich: U darf keine Löcher haben. Es reicht z.B. aus, wenn U **sternförmig** ist; das bedeutet:

Es gibt einen Punkt $x_0 \in U$, sodass jede Verbindungsstrecke $\overline{x_0 x}$ $(x \in U)$ ganz in U liegt.

Gilt sogar $\overline{xy} \subseteq U$ für alle $x, y \in U$, so heißt U **konvex**.

Z.B. ist $\mathbb{R}^n$ selbst und jede Kugel in $\mathbb{R}^n$ konvex, also insbesondere sternförmig.

Satz 5.3 *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und $g = (g_1, \ldots, g_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld mit*

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j).$$

Dann existiert eine Stammfunktion $f : U \to \mathbb{R}$ von g.

Beispiel 5: fortgesetzt
$g(x,y) = (\cos y, -x\sin y + e^y)$ hat eine Stammfunktion.

Beispiel 6:
$g(x,y) = (xy, y)$ hat keine Stammfunktion, ist also kein Gradientenfeld, da

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = x \neq 0 = \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y).$$

Beispiel 7:
$g(x,y) = (2x + y^3, 3xy^2 + y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 3y^2 = \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y).$$

Also existiert eine Stammfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_1(x,y) = 2x + y^3 \\ (2) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_2(x,y) = 3xy^2 + y \end{array}.$$

Aus (1): Halte y fest und integriere nach x:

$$f(x,y) = \int (2x + y^3)dx + C(y) \implies$$

$$f(x,y) = x^2 + xy^3 + C(y).$$

Bestimme $C(y)$ aus (2):

$$3xy^2 + y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 + C'(y) \implies$$

$$C'(y) = y \implies$$

$$C(y) = \frac{y^2}{2} + \text{const}.$$

Insgesamt: $f(x,y) = x^2 + xy^3 + \frac{y^2}{2}$ ist eine Stammfunktion von g.

Methode bei 3 Variablen:

$$g(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z), g_3(x,y,z))$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = g_1$ liefert $f(x,y,z) = F(x,y,z) + C_1(y,z)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = g_2$ liefert $C_1(y,z) = G(y,z) + C_2(z)$
$\frac{\partial f}{\partial z} = g_3$ liefert $C_2(z) = H(z) + \text{const}.$

5.3 Differenzierbarkeit und Funktionalmatrix

Wir wollen den Begriff der Differenzierbarkeit bei Funktionen einer Variablen auf Vektorfunktionen $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ übertragen. Die partielle Differenzierbarkeit allein reicht offensichtlich nicht, da daraus nicht die Stetigkeit folgt. Wir versuchen deshalb, die Idee der linearen Approximation auf den allgemeinen Fall zu übertragen.

Wir betrachten zunächst eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für x in der "Nähe" von x_0

oder

$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$, für "kleine" $h \in \mathbb{R}$.

Die Definition der Differenzierbarkeit an der Stelle x_0 kann wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Für differenzierbares $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ soll analog gelten

$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ für "kleine" $h \in \mathbb{R}^n$.

Dabei soll $h \to f'(x_0)h$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ sein.

Deshalb:

Definition 5.4 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar in $x \in U$, falls $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert mit*

$$\frac{f(x + h) - f(x) - A \cdot h}{\|h\|} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Bem.: A ist eindeutig bestimmt.

In diesem Fall wird A mit $f'(x)$ bezeichnet und heißt **Ableitung von f an der Stelle** *x.*

Die Matrix $f'(x)$ heißt auch (totales) **Differential von f an der Stelle** *x.*

Wie findet man $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$?

Für $m = 1 :\ f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ist also ein Zeilenvektor.
Setzen wir für h speziell $h = te_i,\ i = 1, \dots, n$, so erhalten wir aus obiger Definition:

$$\frac{f(x + te_i) - f(x) - tAe_i}{|t|} \to 0 \quad (t \to 0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x + te_i) - f(x) - tAe_i}{t} \cdot \frac{t}{|t|} \to 0 \quad (t \to 0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \to Ae_i \quad (t \to 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Ae_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$
$$\Rightarrow A = (f_{x_1}(x) \ldots f_{x_n}(x)) = \mathrm{grad} f(x)$$

Analog für $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad} f_1(x) \\ \vdots \\ \mathrm{grad} f_m(x) \end{pmatrix}$$

Schreibweisen für obige Matrix:

$$J_f(x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x).$$

Sie heißt **Funktionalmatrix** oder **Jacobimatrix von f an der Stelle** x. Für $n = m$ heißt $\det J_f(x)$ die **Funktionaldeterminante** von f an der Stelle x.

Bea.: Obige Rechnung zeigt wie $f'(x)$ aussieht, falls f in x differenzierbar ist. Die Existenz der Jacobimatrix $J_f(x)$ (d.h. alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren in x) reicht i.a. nicht für die Differenzierbarkeit von f an der Stelle x aus. Wir wissen bisher nur: **Wenn** f in x differenzierbar ist, dann existieren alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f in x und es gilt $f'(x) = J_f(x)$.

Aber es gilt (ohne Beweis):

Satz 5.5 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar in $x \in U$, wenn alle partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n)$$

in einer Kugel $U_\delta(x) \subseteq U$ existieren und in x stetig sind.

Insbesondere gilt: Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) in U stetig partiell differenzierbar, so ist f differenzierbar in U (also differenzierbar in jeder Stelle $x \in U$).

Beispiel 8:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$$

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

f erfüllt die Voraussetzung von Satz 5.5 (in jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$). Es gilt also

$$f'(x,y) = J_f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Beispiel 9

$f(x,y) = x^2e^y + xy + 1$
$f_x(x,y) = 2xe^y + y,\ f_y(x,y) = x^2e^y + x.$
Wieder nach Satz 5.5 gilt

$$f'(x,y) = J_f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x)$$

Speziell für $a = (1,0):\ f(a) = 2,\ f'(a) = (2,2)$

Tangentialebene in $(1,0,2)$ an Graph f:

$$T(x,y) = f(a) + f'(a)((x,y) - a)$$

$$= 2 + (2,2) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} = 2 + 2(x-1) + 2y = 2x + 2y$$

Folgendes Beispiel zeigt, dass die Existenz der Jacobi-Matrix nicht immer die Differenzierbarkeit von f zur Folge hat!

Beispiel 10

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$J_f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$$

$J_f(0,0) = (0,0)$, denn

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0, \qquad \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \quad (t \neq 0)$$

Aber $(h = (h_1, h_2))$:

$$\frac{f(h) - f(0,0) - (0,0) \cdot h}{\|h\|} = \frac{\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \frac{h_1h_2}{(h_1^2 + h_2^2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Für die gegen $(0,0)$ konvergente Folge $(1/n, 1/n)$ ergibt sich

$$\frac{f((1/n,1/n)) - f(0,0) - (0,0) \cdot (1/n,1/n)^T}{\|(1/n,1/n)\|} = \frac{n}{2\sqrt{2}} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Somit ist f in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

5.4 Kettenregel und Folgerungen

Die Kettenregel für differenzierbare Funktionen einer Variablen überträgt sich direkt auf den Fall differenzierbarer Funktionen mehrerer Variablen.

Satz 5.6 *Kettenregel:*

g differenzierbar in x.
f differenzierbar in $g(x)$.
$F = f \circ g$ möglich.
Dann ist F differenzierbar in x und es gilt:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot f'(x) \qquad \text{Multipl. von Matrizen.}$$

Spezialfälle:

(a) $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g = (g_1, \ldots, g_n) : I \subseteq \mathbb{R} \to U$

$F(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))\ (t \in I)$

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))\right) \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix} \\ &= \langle \mathrm{grad} f(g(t)), g'(t) \rangle \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \cdot \frac{dg_i}{dt}(t).$$

Kurz, aber ungenau:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dg_i}{dt}.$$

Beispiel 11

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$g(t) = (\cos t, \sin t, t)\ (t \in \mathbb{R})$

$(f \circ g)(t) = t^2 + 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = 2t$

oder

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \cdot \frac{dg_i}{dt}(t)$$
$$= 2\cos t \cdot (-\sin t) + 2\sin t \cdot (\cos t) + 2t \cdot 1 = 2t.$$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

$F(u,v) = (f\circ g)(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

$f'(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix}$$

$F'(u,v) = (F_u(u,v), F_v(u,v))$.

Nach der Kettenregel gilt:

$F_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}(f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)))$
$= f_x(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot x_u(u,v)$
$+ f_y(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot y_u(u,v)$
$+ f_z(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot z_u(u,v)$

$F_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}(f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)))$
$= f_x(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot x_v(u,v)$
$+ f_y(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot y_v(u,v)$
$+ f_z(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot z_v(u,v)$

Richtungsableitung:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R},\ x \in U,\ v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$.

Der Grenzwert (falls existent)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) := D_v f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

heißt **Richtungsableitung** von f in x in Richtung von v.

Spezialfall: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x)$, d.h. die partiellen Ableitungen sind Richtungsableitungen in Richtung der Koordinatenachsen.

f differenzierbar in x:
$\Rightarrow D_v f(x) = f'(x) \cdot v = \langle \mathrm{grad} f(x), v \rangle$,

denn für $h(t) := f(x+tv)$ gilt $h'(0) = D_v f(x)$ und nach der Kettenregel ist

$$h'(0) = f'(x) \cdot v = \langle \mathrm{grad} f(x), v \rangle.$$

Bemerkungen zum Gradienten:
$\mathrm{grad} f(x)$ zeigt in die Richtung, in der die Steigung von f maximal ist.

Denn:
Ist $\mathrm{grad} f(x) = 0$, so ist die Steigung in jede Richtung v gleich 0. Sei nun $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$, und sei $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ eine beliebige Richtung.

Wir setzen

$$w := \frac{\mathrm{grad} f(x)}{\|\mathrm{grad} f(x)\|},$$

d.h. w ist der Vektor mit Länge 1 der in Richtung des Gradienten zeigt.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x) &= \langle \mathrm{grad} f(x), v \rangle \\ \leq \|\mathrm{grad} f(x)\| &= \frac{\langle \mathrm{grad} f(x), \mathrm{grad} f(x) \rangle}{\|\mathrm{grad} f(x)\|} \\ &= \langle \mathrm{grad} f(x), \frac{\mathrm{grad} f(x)}{\|\mathrm{grad} f(x)\|} \rangle = \\ &= \langle \mathrm{grad} f(x), w \rangle = \frac{\partial f}{\partial w}(x). \end{aligned}$$

Also ist unter allen Richtungsableitungen an der Stelle x die in Richtung w maximal, und die maximale Steigung von f in x ist $\|\mathrm{grad} f(x)\|$. Analog dazu zeigt $-\mathrm{grad} f(x)$ in die Richtung des steilsten Abstiegs.

Bsp.: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$. f ist in U differenzierbar und $\mathrm{grad} f(x,y) = -2(x,y)$. Die Richtung des steilsten Anstiegs ist also stets

$$-\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

5.5 Methode der Lagrangemultiplikatoren

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar.
Wir betrachten die Menge

$$N = \{x \in U : g(x) = 0\}$$

und suchen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, also Extrema von $f|_N$:
Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt lokale Minimalstelle bzw. Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, wenn $g(x_0) = 0$ gilt und eine Kugel $U_\delta(x_0) \subseteq U$ existiert mit

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (x \in U_\delta(x_0) \cap N),$$

bzw.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (x \in U_\delta(x_0) \cap N).$$

Beispiel 12: Sei $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Welcher Punkt (x, y, z) des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

hat den kleinsten Abstand zu (x_1, y_1, z_1)?
Also: Suche Minimum von

$$f(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Bem.: In diesem Beispiel ist N kompakt. Es gibt also (sogar globale) Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$.

Die **Multiplikatorenregel von Lagrange** ist eine notwendige Bedingung für lokale Exremalstellen unter Nebenbedingungen:

Ohne Beweis: Wenn f in $x_0 \in U$ ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ hat, und wenn $\mathrm{grad} g(x_0) \neq 0$ ist, dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{grad} f(x_0) + \lambda_0 \cdot \mathrm{grad} g(x_0) = 0.$$

Also Methode:

Betrachte **Lagrangefunktion**

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda g(x)$$

und suche kritische Punkte von L, also Lösungen des Gleichungssystems

$$\mathrm{grad} L(x, \lambda) = 0.$$

Dies ergibt $n + 1$ Gleichungen in den Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, \lambda$.

$$L_{x_1}(x, \lambda) = \cdots = L_{x_n}(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \quad \mathrm{grad}(f + \lambda g)(x) = 0$$

$$L_\lambda(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \quad g(x) = 0$$

Beispiel 12 Fortsetzung

$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$

$$= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$\text{grad}L(x,y,z,\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lllll}
(1) & 2(x-x_1) + 2\lambda\frac{x}{a^2} = 0 & \Leftrightarrow & (1+\frac{\lambda}{a^2})x = x_1 \\
(2) & 2(y-y_1) + 2\lambda\frac{y}{b^2} = 0 & \Leftrightarrow & (1+\frac{\lambda}{b^2})y = y_1 \\
(3) & 2(z-z_1) + 2\lambda\frac{z}{c^2} = 0 & \Leftrightarrow & (1+\frac{\lambda}{c^2})z = z_1 \\
(4) & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 & \Leftrightarrow & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1
\end{array}$$

$$\text{grad}g(x,y,z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \neq 0.$$

Auf N ist somit $\text{grad}g(x,y,z) \neq 0$.

Für $\lambda \neq -a^2, -b^2, -c^2$:

$$x = \frac{a^2 x_0}{a^2+\lambda},\ y = \frac{b^2 y_0}{b^2+\lambda},\ z = \frac{c^2 z_0}{c^2+\lambda}$$

Einsetzen in (4) und nach λ auflösen!

Beispiel 13

Sei $a > 0$. Man konstruiere eine oben offenen "Schachtel" mit Volumen a und minimaler Oberfläche.
Also:

$f(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz, \quad (x,y,z) \in U = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

f soll Minimal werden unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = xyz - a = 0.$$

Auf U ist $\text{grad}g(x,y,z) = (yz, xz, xy) \neq 0$.

Betrachte

$$L(x,y,z,\lambda) = xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - a).$$

$\text{grad}L(x,y,z,\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$L_x = 0 : y + 2z + \lambda yz = 0$

$L_y = 0 : x + 2z + \lambda xz = 0$

$L_z = 0 : 2y + 2x + \lambda xy = 0$

$L_\lambda = 0 : xyz - a = 0$

Daraus:

$$\begin{aligned} &xy + 2xz + \lambda xyz = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow 2(x-y)z = 0 \\ &xy + 2yz + \lambda xyz = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow (y-2z)x = 0 \\ &2xz + 2yz + \lambda xyz = 0 \\ &xyz = a \\ &\underset{x,y,z\neq 0}{\Rightarrow} \quad x = y = 2z. \end{aligned}$$

In $xyz = a$ eingesetzt ergibt sich

$$(x, y, z) = (\sqrt[3]{2a}, \sqrt[3]{2a}, \frac{\sqrt[3]{2a}}{2}).$$

(Berechnen von λ ist hier unnötig!)

Zusammenfassung:

Suchen wir eine Extremalstelle x_0 von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so suchen wir diese mit Hilfe der kritischen Punkte von $L(x, \lambda)$. Ist (x_0, λ_0) ein solcher kritischer Punkt, so ist x_0 ein **Kandidat** für eine Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.
Ob x_0 tatsächlich eine gesuchte Extremalstelle ist, muss gesondert untersucht werden. Ferner müssen die Stellen x mit $\mathrm{grad} g(x) = 0$, die bisher ausgeschlossen waren, ebenfalls auf Extremaleigenschaft untersucht werden.

In speziellen Fällen lassen sich Extremalprobleme unter Nebenbedingungen auch auf Extremalproblem ohne Nebenbedingungen zurückführen:

Nochmals:
$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ minimal unter Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = xyz - a = 0, a > 0.$$

Zurückführung auf Extremalproblem ohne Nebenbedingungen:

$$g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{a}{xy} \quad (x > 0, y > 0)$$

in $f(x, y, z)$ eingesetzt

$$h(x, y) := f(x, y, \frac{a}{xy}) = xy + \frac{2a}{y} + \frac{2a}{x}.$$

Bea.: $h(x, y) = f(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in N$.

Kritische Punkte von h:

$$\begin{aligned} &h_x(x, y) = y - \tfrac{2a}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xy = \tfrac{2a}{x} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow x = y \\ &h_y(x, y) = x - \tfrac{2a}{y^2} = 0 \Leftrightarrow xy = \tfrac{2a}{y} \end{aligned}$$

Somit $x = y = \sqrt[3]{2a},\ z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2a}$.

Nun kann man die kritische Stelle durch Betrachten der Hesse-Matrix untersuchen und stellt fest, dass es sich um eine lokale Minimalstelle handelt.

Verfahren bei mehreren Nebenbedingungen:

$$f, g_1, g_2 : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Gesucht: Extremwerte von f unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = 0, \qquad g_2(x) = 0.$$

Hier wird also f auf die Menge

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = g_2(x) = 0\}$$

eingeschränkt. Das Verfahren geht nun analog. Betrachte die Lagrangefunktion:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x).$$

und suche Lösungen von $\mathrm{grad} L(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0$.
Die Bedingung $\mathrm{grad} g(x_0) \neq 0$ aus dem Fall mit einer Nebenbedingung wird ersetzt durch

$$\mathrm{Rang} \begin{pmatrix} \mathrm{grad} g_1(x_0) \\ \mathrm{grad} g_2(x_0) \end{pmatrix} = 2.$$

Beispiel 14:

Suche Extremalstellen von $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y) = x + y - 2 = 0, \qquad g_2(x, y) = x - y + 1 = 0.$$

$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + \lambda_1(x + y - 2) + \lambda_2(x - y + 1).$

Lösung aber besser geometrisch: Abstand von $(0, 0)$ zum Schnittpunkt S der Geraden

$$y = 2 - x, \quad y = x + 1.$$

Es gilt $N = \{S\} = \{(1/2, 3/2)\}$. Somit ist S Maximal- und Minimalstelle (global) obigen Problems.

5.6 Taylorsche Formel

Wie für Funktionen die auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ erklärt sind gibt es auch für Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) eine Taylorsche Formel.
Wir geben zwei Spezialfälle an:

Satz 5.7 *(Mittelwertsatz:) Es sei f stetig partiell differenzierbar auf U, $x_0, x \in U$ und die Verbindungsstrecke $\overline{x_0 x} \subseteq U$. Dann existiert ein $\xi \in \overline{x_0 x}$ mit*

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + \langle \mathrm{grad} f(\xi), x - x_0 \rangle.$$

Beweis: Setze $\gamma(t) = tx + (1-t)x_0$, $h(t) = f(\gamma(t))$ $(t \in [0,1])$. Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{dh}{dt}(t) = f'(\gamma(t)) \cdot g'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot (x - x_0).$$

Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz existiert ein $\eta \in (0,1)$ mit

$$f(x) - f(x_0) = h(1) - h(0) = h'(\eta)(1-0) = f'(\gamma(t)) \cdot (x - x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0),$$

mit $\xi = g(\eta) = \eta x + (1-\eta)x_0 \in \overline{x_0 x}$. □

Satz 5.8 *(Satz von Taylor 2. Ordnung:) Es sei f zweimal stetig partiell differenzierbar auf U, $x_0, x \in U$ und die Verbindungsstrecke $\overline{x_0 x} \subseteq U$. Dann existiert ein $\xi \in \overline{x_0 x}$ mit*

$$f(x) = f(x_0) + \langle \mathrm{grad} f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0)$$

(Ohne Beweis.)

Ist z.B. $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ positiv definit, so ist auch $H_f(\xi)$ positiv definit, für ξ hinreichend Nahe bei x_0. Dann gilt für x aus einer Kugel $U_\delta(x_0) \subseteq U$:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Also ist x_0 eine lokale Minimalstelle von f, vgl. Satz 5.2.