Erweiterter euklidischer Algorithmus

Ein tabellarisches Verfahren, um mittels des euklidischen Algorithmus sowohl den größten gemeinsamen Teiler g von a_0 und b_0 als auch Koeffizienten x und y für eine Darstellung der Form $g = x \cdot a + y \cdot b$ simultan zu berechnen, sieht zum Beispiel wie folgt aus (wir gehen dabei davon aus, daß der euklidische Algorithmus nach l Schritten zu Ende ist):

n	a_n	b_n	c_n	x_n	y_n
-2	$*$	$*$	$*$	0	1
-1	$*$	$*$	$*$	1	0
0	a_0	b_0	c_0	x_0	y_0
1	a_1	b_1	c_1	x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$l-2$	a_{l-2}	b_{l-2}	c_{l-2}	x_{l-2}	y_{l-2}
$l-1$	a_{l-1}	b_{l-1}	c_{l-1}	$*$	$*$
l	0	g	$*$	$*$	$*$

Diese Tabelle ergibt sich dabei durch:

a) Zellen mit Eintrag $*$ sind leer.

b) Die Anfangswerte sind durch $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_{-2} = y_{-1} = 0$ und $x_{-1} = y_{-2} = 1$ gegeben.

c) Die nachfolgenden Einträge ergeben sich dann aus den rekursiven Beziehungen $a_{k+1} = b_k - c_k \cdot a_k$, wobei c_k derart gewählt wird, daß $0 \leq a_{k+1} < a_k$ gilt, und $b_{k+1} = a_k$ für $0 \leq k \leq l-1$, sowie $x_k = x_{k-2} - c_k \cdot x_{k-1}$ und $y_k = y_{k-2} - c_k \cdot y_{k-1}$ für $0 \leq k \leq l-2$.

Dann gilt: $ggT(a, b) = b_l$, $x = x_{l-2}$ und $y = y_{l-2}$.

Für Aufgabe 2 vom 2. Übungsblatt ergibt sich so zum Beispiel:

n	a_n	b_n	c_n	x_n	y_n
-2	$*$	$*$	$*$	0	1
-1	$*$	$*$	$*$	1	0
0	1040	1584	1	-1	1
1	544	1040	1	2	-1
2	496	544	1	-3	2
3	48	496	10	32	-21
4	16	48	3	$*$	$*$
5	0	16	$*$	$*$	$*$

Wir können nun ablesen: ggT(1040, 1584) = 16 und $32 \cdot 1040 - 21 \cdot 1584 = 16$.