Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

1. Übungsblatt

Aufgabe 1
Wir definieren die *Ulam-Zahlen* $u_1, u_2, \dots \in \mathbb{N}$ wie folgt: $u_1 := 1$ und $u_2 := 2$. u_n $(n > 2)$ ist dann die kleinste natürliche Zahl grösser als u_{n-1}, die sich auf eindeutige Art als $u_i + u_j$ (mit $1 \leq i < j \leq n-1$) schreiben lässt.

a) Bestimmen Sie $u_1, \dots, u_{12}$.

b) Finden Sie eine (richtig) begründete Antwort auf die Frage, ob es unendlich viele Ulam-Zahlen gibt.

c) Welches ist die kleinste Zahl größer gleich drei, die sich nicht als Summe zweier verschiedener Ulam-Zahlen schreiben lässt?

Aufgabe 2
Man zeige für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$[nx] = \sum_{j=0}^{n-1} [x + \frac{j}{n}].$$

Aufgabe 3
Es seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1,$$

$a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Man zeige, dass n sich entweder als $[k \cdot a]$ oder als $[k \cdot b]$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) schreiben lässt.

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Es seien die *Fibonacci-Zahlen* F_n, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und $F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$. Zeigen Sie der Reihe nach:

a) Die Zahlen

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

erfüllen die Gleichungen

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \quad \text{bzw.} \quad \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$.

c) $F_{2n} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} F_j$.

Vielleicht brauchen Sie folgende Formel: $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = (1+x)^n$.

ABGABE bis Mittwoch, den **28. April 2004, 14:00 Uhr** in den gekennzeichneten Einwurfkästen im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG neben Zimmer 308 oder zu Beginn der Übung.