Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

2. Übungsblatt

Aufgabe 1
Seien $a, n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{ggT}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\mathrm{ggT}(m,n)} - 1.$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie den ggT von 1584 und 1040, und stellen Sie ihn in der Form $a \cdot 1584 + b \cdot 1040$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ dar.

Aufgabe 3
Es sei $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und rekursiv $F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) die Folge der Fibonacci-Zahlen.

a) Zeigen Sie: Ist $n \geq 3$ eine natürliche Zahl, so braucht man, um $\mathrm{ggT}(F_n, F_{n+1})$ mittels des Euklidischen Algorithmus zu berechnen (also bis 0 dasteht), $n - 1$ Schritte.

b) Es sei $n \geq 3$, und $1 < a \leq b$ seien natürlich Zahlen, so dass für die Berechnung ihres ggT mittels des Euklidischen Algorithmus mindestens $n - 1$ Schritte nötig sind. Zeigen Sie, dass $a \geq F_n$ und $b \geq F_{n+1}$ gilt.

Aufgabe 4
Es seien $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Potenzen T^k und S^k für alle $k \in \mathbb{Z}$.

b) Zeigen Sie, dass sich jede 2×2-Matrix A mit Determinante 1 und ganzzahligen Einträgen als Produkt von geeigneten Potenzen von S und T schreiben lässt.

Tipp: Durch die Multiplikation von links mit S und T lässt sich im Wesentlichen der Euklidische Algorithmus für die erste Spalte realisieren.

ABGABE bis Mittwoch, den **05. Mai 2004, 14:00 Uhr** in den gekennzeichneten Einwurfkästen im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG neben Zimmer 308 oder zu Beginn der Übung.