Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

# Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

## 3. Übungsblatt

**Aufgabe 1** (4 Punkte)
Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $p \mid (a^p - a)$.

*Tipp*: Versuchen Sie es mal mit vollständiger Induktion nach $a$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Sei $H := \{1 + 4k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $H$ unter der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ abgeschlossen ist.

$x \in H$ heißt $H$-irreduzibel, wenn aus $x = yz$, $y, z \in H$ folgt, dass $y = 1$ oder $z = 1$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass sich jedes Element aus $H$ als Produkt von $H$-irreduziblen Elementen in $H$ schreiben lässt.

c) Schreiben Sie 693 auf zwei verschiedene Arten als Produkt von $H$-irreduziblen Elementen in $H$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte, *eine alte Klausuraufgabe*)
Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 - b^3 = 1$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{ggT}(a,\, b) = 1$, und $a$ oder $b$ ist gerade.

b) Wenn $a$ gerade ist, sind $a-1$ und $a+1$ teilerfremde Zahlen, und beide sind dritte Potenzen.

c) Wenn $a$ gerade ist, dann gilt $a = 0$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)
Für $n \geq 2$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{Z}$.
*Tipp*: Multiplizieren Sie mit $2^{e-1}$, wobei $2^e \leq n < 2^{e+1}$ sein soll.

**ABGABE** bis Mittwoch, den **12. Mai 2004, 14:00 Uhr** in den gekennzeichneten Einwurfkästen im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG neben Zimmer 308 oder zu Beginn der Übung.