Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $a, b \geq 2$. Zeigen Sie:

a) Ist $a^b + 1$ eine Primzahl, so sind a und b gerade und b sogar eine Zweierpotenz.

b) Ist $a^b - 1$ eine Primzahl, so ist a gleich 2 und b eine Primzahl.

Tipp: Schreiben Sie in Teil a) a^b doch mal als $(a + 1 - 1)^b$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $K \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie explizit eine Zahl N, so dass für alle $a \in \mathbb{N}$ die Zahlen $aN + 2, aN + 3, \ldots, aN + K$ keine Primzahlen sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Seien $n, a, b \in \mathbb{N}$, $a - 1$ und $b - 1$ durch n teilbar. Zeigen Sie, dass $ab - 1$ durch n teilbar ist.

b) Zeigen Sie (a la Euklid), dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die bei Division durch 4 den Rest 3 lassen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Die Möbiusfunktion μ ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ nicht quadratfrei} \\ (-1)^a, & n \text{ Produkt von } a \text{ verschiedenen Primzahlen.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ABGABE bis Mittwoch, den **19. Mai 2004, 14:00 Uhr** in den gekennzeichneten Einwurfkästen im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG neben Zimmer 308 oder zu Beginn der Übung.