Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

# Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

## 5. Übungsblatt

**Aufgabe 1** (4 Punkte)
Wir betrachten die Gleichung $a^2 + ab - b^2 = 1$ und suchen ihre Lösungen $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $k \geq 0$ die Fibonacci-Zahlen $a := F_{2k+1}$ und $b := F_{2k+2}$ eine Lösung unserer Gleichung sind.

b) Seien $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ eine Lösung. Zeigen Sie, dass

$$a \leq b < 2a \quad \text{und} \quad a = b \Longleftrightarrow a = b = 1$$

gilt.

c) Seien $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ eine Lösung mit $a, b \geq 2$. Zeigen Sie, dass dann auch $(2a - b, b - a)$ eine Lösung in $\mathbb{N}^2$ ist.

d) Gibt es noch positive Lösungen außer den in a) angegebenen?

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = 2c^2$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Gleichung $a^4 + b^4 = c^2$ in $\mathbb{N}$ keine Lösung hat.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)
Wenn man bereits weiß, dass $2^{131} - 1$ einen Primteiler $p$ mit der Eigenschaft $p < 750$ hat, findet sich dieser leicht. Machen Sie einen Vorschlag, und zeigen Sie, dass es sich dabei tatsächlich um einen Primteiler von $2^{131} - 1$ handelt.

**ABGABE** bis Mittwoch, den **26. Mai 2004, 14:00 Uhr** in den gekennzeichneten Einwurfkästen im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG neben Zimmer 308 oder zu Beginn der Übung.