Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Der Kleinstaat Fabelland mit 33333 Einwohnern hat eine eigene Armee. Bei Übungsmärschen geht man in 5er-Reihen - dann gehen genau 4 Offiziere voraus. Bei Paraden wird in 8er-Reihen marschiert - dann läuft das 5-köpfige Musikkorps vorne weg. Beim jährlichen Manöver gehen alle in 7er-Reihen, und es bleiben genau 3 Mann zum Ziehen der einzigen Kanone von Fabelland übrig. Als einmal hoher Staatsbesuch kam, stellte man sich in 9er-Reihen vor dem Bahnhof auf, wobei der General und der Trompeter die Armee flankierten. In der Verfassung des Landes steht, dass höchstens 10 Prozent aller Einwohner von Fabelland in der Armee sein dürfen.
Wieviele Soldaten hat Fabelland?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{P}$ und $q = 2p + 1$ ein Teiler von $2^p - 1$. Zeigen Sie, dass dann q eine Primzahl ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Wir schreiben eine natürliche Zahl n als Dezimalzahl $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ mit $a_k \neq 0$ und $0 \leq a_i \leq 9$ $(0 \leq i \leq k)$. Finden Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft

$$2n = a_0 a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie für natürliche Zahlen M, N mit $M \mid N$:

   Für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(a, M) = 1$ gibt es ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(b, N) = 1$ und $a \equiv b \mod M$.

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft $\operatorname{ggT}(a + bn, c) = 1$.

ABGABE bis Mittwoch, den **02. Juni 2004, 14:00 Uhr** in den gekennzeichneten Einwurfkästen im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG neben Zimmer 308 oder zu Beginn der Übung.