Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei K ein imaginär quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$ und n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass es nur endlich viele Elemente $z \in \mathcal{O}$ mit der Eigenschaft $N(z) = n$ gibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Die Gleichung
$$a^3 + b^3 = c^3 \qquad (*)$$
besitzt keine Lösung in $\mathbb{Z}^3$ mit der Eigenschaft $3 \nmid a$, $3 \nmid b$ und $3 \nmid c$.

b) Wenn $(*)$ eine Lösung in $\mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ hat, dann gibt es auch $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die $(*)$ erfüllen und paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gitter und Φ ein Automorphismus von $\mathbb{R}^2$, der Γ in sich überführt. Φ habe die endliche Ordnung k.
Zeigen Sie: Wenn Φ negative Determinante hat, dann ist $k = 2$. Allgemein gilt $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Hinweis: Beschreiben Sie Φ durch die Abbildungsmatrix bezüglich einer Gitterbasis. Welche Eigenwerte kann Φ haben?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Weiter seien $d_1, \ldots, d_n$ positive reelle Zahlen, so dass
$$d_1 \cdot \ldots \cdot d_n > |\det(A)|$$
gilt. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ gibt, so dass für den Vektor $(y_1, \ldots, y_n)^t := A \cdot x$ gilt:
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : |y_i| < d_i.$$

b) Sei speziell $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Finden Sie einen Vektor x wie in $a)$ für die Werte $(d_1, d_2) \in \{(\frac{1}{2}, 5); (\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$.

ABGABE bis Mittwoch, den **07. Juli 2004, 14:00 Uhr** in den gekennzeichneten Einwurfkästen im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG neben Zimmer 308 oder zu Beginn der Übung.