Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h_2}{k_2} < \frac{h_3}{k_3}$ aufeinander folgende Zahlen einer Farey-Reihe $\mathcal{F}_n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{h_2}{k_2} = \frac{h_1 + h_3}{k_1 + k_3}$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $2 \leq f_1 < f_2 < f_3 < \dots$ ganze Zahlen und $\alpha := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_i}$.

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $q = f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ und $p = q \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_i}$. Zeigen Sie:

$$\mid \alpha - \frac{p}{q} \mid < \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{f_{n+1} - 1}.$$

b) Folgern Sie: Gilt für unendlich viele Werte von n die Ungleichung $f_{n+1} \geq 1 + (f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)^{n-1}$, dann ist α eine Liouville-Zahl.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Entwickeln Sie $\sqrt{6}$ in einen Kettenbruch und berechnen Sie die ersten drei Konvergenten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ eine Untergruppe, $\Gamma \neq \{0\}$. Weiter sei $u := \inf\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma > 0\}$. Zeigen Sie:

a) Wenn $u = 0$ gilt, dann liegt Γ dicht in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0 : \exists \gamma \in \Gamma : \mid x - \gamma \mid < \epsilon.$$

b) Wenn $u \neq 0$ gilt, dann ist Γ ein Gitter in $\mathbb{R}$, es gilt sogar $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot u$.

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

ABGABE bis Mittwoch, den **21. Juli 2004, 14:00 Uhr** in den gekennzeichneten Einwurfkästen im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG neben Zimmer 308.