Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Dr. Stefan Kühnlein
Lars Hoffmann

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2004

Musterlösung – 13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Aus der Vorlesung wissen wir, dass $h_2k_1 - h_1k_2 = 1$ und $h_3k_2 - h_2k_3 = 1$ gilt. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} h_2k_1 - h_2k_2 &= h_3k_2 - h_2k_3 \quad \Longleftrightarrow \\ h_2k_1 + h_2k_3 &= h_3k_2 + h_1k_2 \quad \Longleftrightarrow \\ h_2(k_1 + k_3) &= k_2(h_1 + h_3), \end{aligned}$$

was wir zeigen wollten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Aus den entsprechenden Definitionen von α, p und q erhalten wir:

$$\begin{aligned} q \cdot \alpha - p &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \tfrac{1}{f_{n+1} \cdot \ldots \cdot f_i} \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{1}{f_{n+1}})^i \\ &= \tfrac{1}{1 - \frac{1}{f_{n+1}}} - 1 \\ &= \tfrac{1}{f_{n+1} - 1}. \end{aligned}$$

b) Aus $f_{n+1} \geq 1 + (f_1 \cdot \ldots f_n)^{n-1}$ folgt

$$\frac{1}{f_{n+1} - 1} \leq (\frac{1}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n})^{n-1}.$$

Aufgrund der in a) bewiesenen Ungleichung gilt also für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$:

$$\mid \alpha - \frac{p}{q} \mid < \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{f_{n+1} - 1} \leq \frac{1}{q^n},$$

was genau der Definition einer Liouville-Zahl entspricht.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung errechnet sich: $a_0 = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$, $a_1 = [\frac{\sqrt{6}+2}{2}]$, $\alpha_2 = \sqrt{6}+2$, $a_2 = [\sqrt{6}+2]$ und $\alpha_3 = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$. Man sieht also, dass $\sqrt{6} = [\,2, \overline{2, 4}\,]$ erfüllt ist.

Die ersten drei Konvergenten von $\sqrt{6}$ sind damit:

$$\begin{aligned} 0-te: &\quad 2 \\ 1-te: &\quad \tfrac{5}{2} \\ 2-te: &\quad \tfrac{22}{9} \\ 3-te: &\quad \tfrac{49}{20} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Nach Voraussetzung gibt es ein $\beta \in \Gamma$ mit der Eigenschaft $0 < \beta < \epsilon$. Dann ist $\beta \cdot \mathbb{Z}$ die von β erzeugte Untergruppe.
Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \cdot \beta \leq x < (z+1) \cdot \beta$. Also haben wir $0 \leq x - z \cdot \beta < \beta < \epsilon$.

b) Sei $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \notin \mathbb{Z} \cdot u$. Dann gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \cdot u < \gamma < (z+1) \cdot u$. Also hat $\gamma - z \cdot u \in \Gamma$ die Eigenschaft $0 < \gamma - z \cdot u < u$, was im Widerspruch zur Definition von u steht.

c) Nehmen wir an, dass $u := \inf\{\gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid \gamma > 0\} > 0$ ist. Nach b) gilt dann: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} \cdot u$. Insbesondere gibt es damit ein $z_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{2} = z_1 \cdot u$ und ein $z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $z_2 \cdot u = 1$. Daraus erhalten wir
$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ni \frac{\sqrt{2}}{z_1} = u = \frac{1}{z_2} \in \mathbb{Q},$$
was offensichtlich nicht gelten kann.