Nachtrag zu Übungsblatt 10

Bei der Übung am Freitag, 9.1.04, war die Frage offen geblieben, wieso $\hat{R}$ vollständig ist. Ich hatte schon folgenden Ansatz gemacht:

Es sei (A_n) eine Folge in $\mathcal{C}$, sodass die Folge $([A_n])$ in $\hat{R}$ eine Cauchyfolge ist. Konstruiere einen Grenzwert $[B]$ von $([A_n])$ durch die Angabe einer geeigneten Cauchyfolge $B = (b_k) \in \mathcal{C}$. Dabei wähle ich für $k \geq 1$ ein $N(k) \geq k$, sodass für alle $m, n \geq N(k)$ die Ungleichung

$$|[A_n] - [A_m]| < \frac{1}{2k}$$

erfüllt ist. Für dieses $N(k)$ wähle ein $M(k)$, sodass für alle $i, j \geq M(k)$ die Ungleichung

$$|A_{N(k),i} - A_{N(k),j}| < \frac{1}{2k}$$

erfüllt ist, und setze $b_k := A_{N(k),M(k)}$. Ich hatte schon gezeigt, dass die Folge $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in R ist, wiederhole das aber besser noch einmal.

Also sei $\varepsilon > 0$ eine ansonsten beliebige reelle Zahl. Wähle ein $K > 1/\varepsilon$, sodass für alle $k, l \geq K$ die Ungleichung

$$|[A_{N(k)} - A_{N(l)}]| < \varepsilon$$

gilt. Das geht, da wir $N(k) \geq k$ voraussetzen. Dann ist (bei festen k und l) für großes L sicher

$$|A_{N(k),L} - A_{N(l),L}| < 2\varepsilon.$$

Wenn dieses große L zusätzlich die Bedingung $L > M(k), M(l)$ erfüllt, dann sieht man damit

$$\begin{aligned} |b_k - b_l| &= |A_{N(k),M(k)} - A_{N(k),L} + A_{N(k),L} - A_{N(l),L} + A_{N(l),L} - A_{N(l),M(l)}| \\ &\leq \tfrac{1}{2k} + 2\varepsilon + \tfrac{1}{2l} \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Das langt.

Nun will ich noch zeigen, dass die Folge der $[A_n]$ gegen $[B]$ konvergiert. Also sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Wähle ein $K > 0$, sodass für $k, l \geq K$ die Ungleichung

$$|b_k - b_l| < \varepsilon$$

gilt. Dann gilt für $k \geq K$ und beliebige $L \geq M(k)$:

$$\begin{aligned} |A_{N(k),L} - b_L| &= |A_{N(k),L} - A_{N(k),k} + A_{N(k),k} - b_k + b_k - b_L| \\ &\leq |A_{N(k),L} - A_{N(k),k}| + |A_{N(k),k} - b_k| + |b_k - b_L| \\ &\leq \tfrac{1}{2k} + \tfrac{1}{2k} + |b_k - b_L| \\ &\leq \tfrac{1}{k} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher bekommen wir für $k \geq \max\{K, 1/\varepsilon\}$:

$$\lim_{L \to \infty} |A_{N(k),L} - b_L| \leq 2\varepsilon$$

oder auch

$$|[A_{N(k)}] - [B]| \leq 2\varepsilon.$$

Das bedeutet aber, dass die Folge $([A_{N(k)}])$ gegen $[B]$ konvergiert. Sie ist also eine konvergente Teilfolge der Cauchyfolge $([A_n])$, und somit konvergiert auch diese gegen $[B]$.

Na, war ja doch nicht sooooo schlimm. Aber auch keine Algebra. SK.