1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeitssätze

(1.1) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $G \subset \mathbb{R}^M$ Gebiet. Zu einem Anfangswert $u_0 \in G$ und $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ suchen wir eine Lösung $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f\big(t, u(t)\big) \qquad t \in (t_0, t_0 + T) \\ u(t_0) &= u_0 \,. \end{aligned}$$

(1.2) Für $u \in C([t_0, t_0 + T], G)$ ist äquivalent:

a) $u \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ und u löst AWA (1.1)

b) u löst die Integralgleichung $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\, ds$ für $t \in [t_0, t_0 + T]$

(1.3) Zu $r > 0$ mit $B_r(u_0) := \{z \in \mathbb{R}^M \colon |z - u_0| \le r\} \subset G$ setze

$$M_r := \max_{(t,z) \in [t_0, t_0+T] \times B_r(u_0)} |f(t,z)| \,.$$

Dann gilt für jede Lösung u von (1.1)

$$|u(t) - u_0| \le (t - t_0) M_r \,, \qquad t \in [t_0, t_0 + \min\{T, \frac{r}{M_r}\}] \,.$$

Im Folgenden sei $T \le \frac{r}{M_r}$.

1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeitssätze

(1.4) Zu $N \in \mathbb{N}$, $t_n^N = t_0 + n\tau_N$, $\tau_N = \frac{T}{N}$ ist der *Eulersche Polygonzug* $u^N \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit

$$u^N(t) = u^N(t_{n-1}^N) + (t - t_{n-1}^N) f\big(t_{n-1}^N, u^N(t_{n-1}^N)\big), \qquad t \in [t_{n-1}^N, t_n^N], \quad n = 1, \dots, N$$

wohldefiniert, und es gilt $|u^N(t) - u_0| \le (t - t_0) M_r$.

(1.5) $v \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ ist Lipschitz-stetig, wenn $L > 0$ existiert mit

$$|v(s) - v(t)| \le L\,|s - t|\,, \qquad s, t \in [t_0, t_0 + T]\,.$$

Die L-stetigen Funktionen bilden einen Banachraum $C^{0,1}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit Norm $\|v\|_{C^{0,1}} = \max\Big\{\|v\|_\infty, \sup_{t_0 \le s < t \le t_0 + T} \dfrac{|v(s) - v(t)|}{|s - t|}\Big\}$.

(1.6) Jede beschränkte Folge $\{v^N\colon N \in \mathbb{N}\}$ in $C^{0,1}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ besitzt eine konvergente Teilfolge $\{v^{N_k}\colon k \in \mathbb{N}\}$ in $C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$, d. h. es existiert $v \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \|v^{N_k} - v\|_\infty = 0$.

(1.7) Die Folge $\{u^N\colon N \in \mathbb{N}\}$ aus (1.4) ist in $C^{0,1}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ beschränkt. Sie besitzt eine konvergente Teilfolge, die gegen eine Lösung $u \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ von (1.1) konvergiert.

1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeitssätze

(1.8) $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ ist in der zweiten Komponente Lipschitz-stetig in G (erfüllt eine L-Bedingung), wenn $L > 0$ existiert mit

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le L\, |y - z|\,, \qquad t \in [t_0, t_0 + T], \quad y, z \in G.$$

(1.9) Sei $f \in C^1([t_0, t_0 + T] \times \overline{G}, \mathbb{R}^M)$, $G \subset \mathbb{R}^M$ beschränkt und konvex.
Dann erfüllt f eine L-Bedingung in G.

(1.10) Seien $u, v \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ Lösungen von $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ und $\dot{v}(t) = f(t, v(t))$.
Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann gilt

$$|u(t) - v(t)| \le \exp(L(t - t_0))\, |u(t_0) - v(t_0)|\,, \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$

(1.11) Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann existiert ein $T < 0$, so dass die AWA (1.1) eindeutig lösbar ist.

(1.12) Seien $w, a, b \colon [t_0, t_0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ stückweise stetig, $b(s) \le b(t)$ für $s < t$, und es gelte

$$w(t) \le \int_{t_0}^{t} a(s) w(s)\, ds + b(t), \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Dann gilt

$$w(t) \le b(t)\, \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\Big), \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.1) Zur Funktion $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ definieren wir den Fluss

$$\phi \colon \mathscr{D} \subset [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

durch $\phi(t, \tau, z) = v(t + \tau)$, wobei $v \in C^1([t, t + \tau], G)$ Lösung einer AWA ist:

$$\begin{aligned} \dot{v}(s) &= f\big(s, v(s)\big) \qquad s \in [t, t + \tau] \\ v(t) &= z \end{aligned}$$

(2.2) Ein Einschrittverfahren wird durch eine Verfahrensfunktion

$$\psi \colon [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

definiert: Zu Schrittweiten $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ und $u_0 \in G$ setze

$$u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1}).$$

Wir setzen $|\tau| = \max_n \tau_n$. Der *diskrete Fluss* ist

$$\phi_\tau(t; \tau, z) = z + \tau \psi(t, \tau, z)\,.$$

(2.3) *globaler Fehler:* $e^n = u(t_n) - u^n$

lokaler Diskretisierungsfehler: $g^n = \dfrac{1}{\tau_n}\big(u(t_n) - u(t^{n-1})\big) - \psi\big(t_{n-1}, \tau_n, u(t_{n-1})\big)$

Es gilt $g^n = g(t_{n-1}, \tau_n, u(t_{n-1}))$ mit $g(t, \tau, z) = \frac{1}{\tau}(\phi(t, \tau, z) - z) - \psi(t, \tau, z)$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.3) Ein Einschrittverfahren heißt *konsistent*, wenn $\lim_{\tau\to 0} g(t,\tau,z) \longrightarrow 0$ gilt.
Es heißt *konsistent von der Ordnung p*, wenn $|g(t,\tau,z)| = O(\tau^p)$ gilt.
Es heißt *konvergent*, wenn $\lim_{\tau\to 0} \max_n e^n = 0$ gilt.
Es heißt *konvergent von der Ordnung p*, wenn $\max_n e^n = O(\tau^p)$ gilt.

(2.4) Wenn $\Lambda > 0$ existiert, so dass für die Verfahrensfunktion gilt

$$|\psi(t,\tau,z) - \psi(t,\tau,y)| \le \Lambda |z-y| \qquad t \in [t_0, t_0+T], \quad \tau \le \tau_0, \quad z,y \in G\,,$$

dann gilt

$$|u(t_n) - u^n| \le |u(t_0) - u^0| \exp\big(\Lambda(t_n - t_0)\big) + \max_{j=1,\dots,n} |g_j| \,\frac{\exp\big(\Lambda(t_n-t_0)\big) - 1}{\Lambda}\,.$$

(2.6) Verfahren von der Konsistenzordnung p sind konvergent von der Ordnung p.

(2.7) Seien $\delta_n > 0,\ \mu_n, z_n \ge 0$ für $n = 0,\dots,N$ gegeben mit $z_n \le (1+\delta_n) z_{n-1} + \mu_n$ für $n = 1,\dots,N$.
Dann gilt $z_n \le z_0 \exp \Delta_n + \max_{j=1,\dots,n} \frac{\mu_j}{\delta_j} \big(\exp(\Delta_n) - 1\big)$ mit $\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} \delta_j$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.8) Ein allgemeines Runge-Kutta-Verfahren mit S Stufen wird durch

Stützstellen	$c \in \mathbb{R}^S$	$(c_1 = 0$ für explizite Verfahren$)$
Gewichte	$b \in \mathbb{R}^S$	$\left(\sum_{s=1}^{S} b_s = 1\right)$
Koeffizienten	$\mathscr{A} \in \mathbb{R}^{S,S}$	$(a_{sr} = 0$ für $s \le r$ für explizite Verfahren$)$

definiert:

$$\psi(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} b_s k_s \quad \text{mit} \quad k_s = f\Big(t + c_s\tau,\ z + \tau \sum_{r=1}^{s-1} a_{sr} k_r\Big)\,.$$

(2.9) a) Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent, wenn $\sum_{s=1}^{S} b_s = 1$ gilt.
b) Wenn ein explizites Runge-Kutta-Verfahren die Konsistenzordnung p hat, dann gilt $p \le S$.

(2.10) Wenn für ein konsistentes Runge-Kutta-Verfahren $c_s = \sum_{r=1}^{S} a_{sr}$, $s = 1,\dots,S$ gilt, dann ist es invariant gegen Autonomisierung.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.11) Ein Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent und von der Ordnung $p=1$, wenn (1) $\sum_s b_s = 1$ gilt, konsistent von der Ordnung $p=2$, wenn zusätzlich (2) $\sum_s b_s c_s = \frac{1}{2}$ gilt, konsistent von der Ordnung $p=3$, wenn zusätzlich (3) $\sum_s b_s c_s^2 = \frac{1}{3}$ und (4) $\sum_{s,r} b_s a_{sr} c_r = \frac{1}{6}$ gilt, und konsistent von der Ordnung $p=4$, wenn zusätzlich (5) $\sum_s b_s c_s^3 = \frac{1}{4}$, (6) $\sum_{s,r} b_s c_s a_{sr} c_r = \frac{1}{8}$, (7) $\sum_{s,r} b_s a_{sr} c_r^2 = \frac{1}{12}$, und (8) $\sum_{s,r,t} b_s a_{sr} a_{rt} c_t = \frac{1}{24}$ gilt.

(2.12) Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann erfüllt die Verfahrensfunktion ψ für explizite Runge-Kutta-Verfahren eine Λ-Bedingung in (2.4).

(2.13) Ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \\ \hline & \hat{b}^T \end{array}$ definiert zwei Verfahrensfunktionen $\psi(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} b_s k_s$, $\hat{\psi}(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} \hat{b}_s k_s$. Der lokale Diskretisierungsfehler wird durch $\eta = \psi(t,\tau,z) - \hat{\psi}(t,\tau,z)$ geschätzt.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.14) Sei $f \in C^k([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^m)$ und sei $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ eine Lösung von $\dot{u}(t) = f\big(t, u(t)\big)$. Dann gilt: $u \in C^{k+1}([t_0, t_1 + T], G)$.

(2.15) Sei f glatt und u Lösung einer AWA in $[t_0, t_0 + T]$. Sei ψ ein Verfahren der Ordnung p, und sei u_τ die diskrete Lösung.
Dann existieren glatte Funktionen $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots$ mit $a_j(t_0) = 0$ und

$$u_\tau(t) = u(t) + a_p(t)\tau^p + a_{p+1}(t)\tau^{p+1} + \dots + O(\tau^{p+k})$$

für alle k und $t \in t_0 + \mathbb{N}\tau \cap [t_0, t_0 + T]$.

Anwendung für $\psi(t, \tau, z) = f(t, z)$ und $p = 1$:
Es gilt für $t \in t_0 + \mathbb{N}\tau \cap [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} u_\tau(t) &= u(t) + a_1(t)\tau + a_2(t)\tau^2 + \dots + O(\tau^{1+k}), \\ u_{\tau/2}(t) &= u(t) + a_1(t)(\tau/2) + a_2(t)(\tau/2)^2 + \dots + O(\tau^{p+k}). \end{aligned}$$

Also gilt für die Extrapolation

$$2u_{\tau/2}(t) - u_\tau(t) = u(t) - (1/2)a_2(t)\tau^2 + \dots + O(\tau^{1+k}).$$

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.1) Zu $\tau > 0$ und $t_n = t_0 + n\tau$ seien $u_0, \dots, u_{k-1}$ Näherungen für die Lösung der AWA (1.1) zu den Zeitpunkten $t_0, \dots, t_{k-1}$.
Ein lineares Mehrschrittverfahren definiert $u_k, \dots, u_n$ rekursiv durch

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} u_{n-i} = \tau \sum_{i=0}^{k} \beta_{k-i} f_{n-i} \text{ für } n = k, \dots, N \text{ mit } f_j = f(t_j, u_j)\,.$$

(3.2) Für f sei eine L-Bedingung erfüllt, und sei $\tau L|\beta_k| < 1$. Dann konvergiert

$$u_n^j = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_{k-i} u_{n-i} + \tau\beta_k f(t_n, u_n^{j-1}) + \tau \sum_{i=1}^{k} \beta_{k-i} f_{n-i}$$

für jedes $u_n^0 \in G$ gegen die Lösung des Mehrschrittverfahrens.

(3.3) Zu $u \in C^1$ definiere den *lokalen Diskretisierungsfehler*

$$g^n = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} u(t_{n-i}) - \sum_{i=0}^{k} \beta_{k-i} \dot{u}(t_{n-i})\,.$$

(3.4) Sei u analytisch. Dann gilt $g^n = \dfrac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \tau^j \left(\dfrac{d}{dt}\right)^j u(t_{n-k})$ mit $C_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i$ und

$$C_j = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{k} i^j \alpha_i - \frac{1}{(j-1)!} \sum_{i=0}^{k} i^{j-1} \beta_i \quad (j > 0).$$

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.5) Ein Verfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn $C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0,\ C_{p+1} \neq 0.$ C_{p+1} heißt *Fehlerkonstante*.

(3.6) Ein Mehrschrittverfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn der lokale Diskretisierungsfehler für Polynome vom Grad p verschwindet.

(3.7) Sei $\chi(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i = \prod_{\nu=1}^{r} (\lambda - \lambda_\nu)^{m_\nu}$ mit $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$ für $\nu \neq \mu$ und $\sum_{\nu=1}^{r} m_\nu = k$. Dann hat jede Lösung $(z_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ der linearen Differenzengleichung $\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} z_{n-i} = 0$ $(n \geq k)$ die Form $z_n = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_{\nu-1}} c_{\nu,j} \frac{n!}{(n-j)!} \lambda_\nu^n$. Die Koeffizienten $c_{\nu,j}$ sind durch $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$ bestimmt.

(3.8) Zu einem Mehrschrittverfahren definiere das *charakteristische Polynom*

$$\chi(z) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i .$$

(3.9) Ein Mehrschrittverfahren heißt *stabil* (0-stabil), wenn für alle Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms gilt: $|\lambda_i| \leq 1$, und alle Nullstellen mit $|\lambda_i| = 1$ sind einfach.

(3.10) Wenn ein Mehrschrittverfahren nicht stabil ist, dann ist die diskrete Lösung für $\tau \to 0$ für fast alle Anfangswerte unbeschränkt.

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.11) Sei $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ eine Matrix mit Spektralradius $\rho = \rho(A) = \max\limits_{\mu \in \sigma(\mu)} |\mu|$, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = \rho$ die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit. Dann existiert eine symmetrisch positiv definite Matrix $S \in \mathbb{R}^{k,k}$ mit $|Az|_S \le \rho |z|_S$ für $z \in \mathbb{R}^k$. Dabei gilt $|z|_S = \sqrt{z^T S z}$.

(3.12) Wenn ein stabiles Mehrschrittverfahren konsistent von der Ordnung p ist, und wenn $u_1, \dots, u_{k-1}$ mit einem Verfahren der Ordnung $p-1$ berechnet werden gilt $|u(t_n) - u_n| = O(\tau^p)$.

(3.13) Für stabile Mehrschrittverfahren der Ordnung p gilt:

$p \le k+2$ für k gerade, $p \le k+1$ für k ungerade, $p \le k$ für $\beta_k = 0$ (explizit)

Prediktor mit explizitem Mehrschrittverfahren

$$u_n^0 = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_{n-1} u_{n-i} + \tau \sum_{i=1}^{k} \beta_{k-i} f_{n-i}, \text{ und für } j > 0$$

Korrektor mit implizitem Mehrschrittverfahren (j=1,...,J)

$$u_n^j = -\sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_{n-i} u_{n-i} + \tau \hat{\beta}_k f\left(t_n, u_n^{j-1}\right) + \tau \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_{k-i} f_{n-i}$$

(3.14) Sei p^c die Ordnung des Korrektors und p^p die Ordnung des Prediktors. Dann ist $p = \min\{p^p + J, p^c\}$ die Ordnung des Prediktor-Korrektor-Verfahren.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.1) Die lineare AWA $\dot{u} = Au$, $u(0) = u_0$, heißt *stabil*, wenn für alle u_0

$$|u(t)| \leq C\,|u_0|$$

gilt, und *asymptotisch stabil*, wenn für alle u_0 gilt

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} |u(t)| = 0\,.$$

(4.2) Für lineare AWA hat ein Runge-Kutta-Verfahren die Form
$u^n = R(\tau_n A)u^{n-1}$ mit $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ und Polynomen $P, Q \in \mathbb{P}_S$.
Für explizite Verfahren ist R ein Polynom.
Wenn das Verfahren die Ordnung p hat, gilt: $R(z) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} z^j + O(z^{p+1})$.

(4.3) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *A-stabil*, wenn die linke Halbebene
$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathit{Re}(z) \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \colon |\exp(z)| \leq 1\}$ im Stabilitätsgebiet
$S = \{z \in \mathbb{C} \colon |R(z)| \leq 1\}$ enthalten ist.

(4.4) Für A-stabile Runge-Kutta-Verfahren gilt: Wenn die lineare AWA stabil ist, dann ist auch die numerische Lösung $u^n = R(\tau A)^n u^0$ stabil mit $|u^n| \leq C\,|u^0|$ für alle Schrittweiten $\tau > 0$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.5) Ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren heißt *L-stabil*, wenn für die rationale Funktion $R(\infty) = \lim\limits_{|z|\to\infty} R(z) = 0$ gilt.

(4.6) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren mit $a_{Sr} = b_r$, $r = 1, ..., S$, und sei $\mathscr{A}$ invertierbar. Dann ist das Verfahren L-stabil.

(4.7) $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ ist genau dann schiefsymmetrisch (d. h. $A^T = -A$), wenn $\exp(tA)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal ist, d. h. $\exp(tA)\exp(tA)^T = I_M$.

(4.8) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *reversibel*, wenn $R(z)\,R(-z) \equiv 1$.

(4.9) Sei R rationale Funktion zu einem Runge-Kutta-Verfahren mit $R(z) = 1 + z + O(z^2)$, und R habe keine Polstelle in $\mathbb{C}_-$. Dann ist äquivalent:
a) $S = \{z \in \mathbb{C} \colon |R(z)| \leq 1\} = \mathbb{C}_-$
b) $|R(z)| = 1$ für $\Re(z) = 0$
c) $R(z)\,R(-z) \equiv 1$

(4.10) Sei $A^T = -A$ schiefsymmetrisch und sei R rationale Funktion eines Runge-Kutta-Verfahrens mit $S = \mathbb{C}_-$.
Dann gilt: $R(\tau A)$ ist orthogonal und $|u^n| = |u^{n-1}|$ für $u^n = R(\tau A)u^{n-1}$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.12) Eine Funktion $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ heißt *monoton*, wenn bzgl. einem Skalarprodukt (,)

$$\big(f(t,z) - f(t,y), z - y\big) \geq 0 \qquad t \in [t_0, t_0 + T], \quad z, y \in G.$$

gilt.

(4.11) Eine AWA $\dot{u}(t) = f\big((t, u(t)\big)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ heißt dissipativ, wenn $-f$ monoton ist. Dann gilt für eine weitere Lösung $\dot{v}(t) = f\big((t, v(t)\big)$

$$|u(t) - v(t) \leq |u(t_0) - v(t_0)|, \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$

(4.12) Ein Einschrittverfahren ψ heißt *B-stabil*, wenn für dissipative AWA

$$|u^n - v^n| \leq |u^{n-1} - v^{n-1}|$$

mit $u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1})$ und $v^n = v^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, v^{n-1})$ gilt.

(4.13) B-stabile Runge-Kutta-Verfahren sind A-stabil.

(4.14) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt algebraisch stabil, wenn

a) $M := \operatorname{diag}(b_s)\mathscr{A} + \mathscr{A}^T \operatorname{diag}(b_s) - bb^T$ positiv semidefinit

b) $b_s \geq 0$

(4.15) Algebraisch stabile Runge-Kutta-Verfahren sind B-stabil.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.16) Zu Stützstellen $0 \le c_1 < c_2 < \cdots < c_S \le 1$ definieren wir ein *Kollokationsverfahren* durch:
Wähle Polynom $P \in \mathbb{P}_S$ mit $P(t_{n-1}) = u^{n-1}$ und

$$\frac{d}{dt} P(t_{n,s}) = f(t_n, P(t_{n,s})) \quad \text{für} \quad t_{n,s} = t_{n-1} + c_s \tau_n\,, \qquad s = 1, \dots, S$$

und setze (falls die Interpolationsaufgabe lösbar ist) $u^n = P(t_n)$.

(4.17) Das Kollokationsverfahren ist ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$b_s = \int_0^1 L_s(t)dt \;\text{ und }\; a_{sr} = \int_0^{c_s} L_r(t)dt \;\text{ für }\; L_s(t) = \prod_{\substack{r=1\\ r \ne s}}^{S} \frac{t - c_r}{c_s - c_r}.$$

(4.18) Wenn die Quadratur (c_s, b_s) die Ordnung p hat, dann hat auch das Kollokationsverfahren die Ordnung p. Für die Gauß-Quadratur gilt $p = 2S$.

(4.19) Die Kollokationsverfahren zur Gauß- und Radau-Quadratur sind B-stabil.

(4.20) Das Kollokationsverfahren zur Gauß-Quadratur ist reversibel.

4 Steife Differentialgleichungen – DAE-Systeme

(4.21) Sei $F \in C(I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $I = [t_0, t_0 + T]$. Dann heißt: $F\big(t, u(t), \dot u(t)\big) = 0$, $t \in I, u(t_0) = u_0$ eine implizit gestellte AWA. $F(t, u, \dot u) = 0$ heißt differentiell-algebraisches System (DAE), wenn $D_3 F(t, u, \dot u)$ entlang der Lösung nicht regulär ist. Der (differentielle) Index ist die kleinste Zahl k, sodass $\dot u$ in Abhängigkeit von u durch $\big(\frac{d}{dt}\big)^j F(t, u, \dot u) = 0$ bestimmt ist.

(4.22) Sei f, g stetig differenzierbar und $D_3 g(t_0, u_0, v_0)$ invertierbar. Betrachte

$$\dot u = f(t, u, v), \qquad 0 = g(t, u, v), \qquad u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0,\ g(t, u_0, v_0) = 0\ .$$

Dann existiert $T > 0$, sodass die DAE in $[t_0, t_0 + T]$ eindeutig lösbar ist.

(4.23) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit $a_{Sr} = b_r$ und

$$\begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{n-1} \\ v^{n-1} \end{pmatrix} + \tau \sum_{s=1}^{S} b_s \begin{pmatrix} k_s \\ \ell_s \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \\ g(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \end{pmatrix}$$

Dann gilt $\big|(u^n, v^n) - (u(t_n), v(t_n))\big| = O(\tau^p)$.

(4.24) Sei $\mathscr{A}$ invertierbar, so konvergiert die Runge-Kutta-Lösung zu

$$\dot u^\varepsilon = f(t, u^\varepsilon, v^\varepsilon), \quad \varepsilon \dot v^\varepsilon = g(t, u^\varepsilon, v^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(t_0) = u_0,\ v^\varepsilon(t_0) = v_0,\ g(t, u_0, v_0) = 0$$

für $\varepsilon \longrightarrow 0$ gegen die Lösung von (4.22).

5 Randwert-Aufgaben: Lineare Randwertaufgaben

(5.2) Zu $I = [a,b]$, $A \in C(I,\mathbb{R}^{M,M})$, $b \in C(I,\mathbb{R}^M)$, $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{M,M}, g \in \mathbb{R}^M$ betrachte die allgemeine inhomogene lineare RWA $u'(x) = A(x)u(x) + b(x)$ für $x \in I$ und $B_a u(a) + B_b u(b) = g$.

(5.3) Sei $u^0 \in C^1(I)$ Lösung der inhomogenen AWA $(u^0)'(x) = A(x)u^0(x) + b(x)$ mit $u^0(a) = 0$, und $u^m \in C^1(I)$ seien Lösungen der homogenen AWA $(u^m)'(x) = A(x)u^m(x)$, $u^m(a) = e^m$ für $m = 1,...,M$. Dann ist $U(x) = \big(u^1(x),\dots,u^M(x)\big)$ ein Fundamentalsystem, und jede Lösung von (5.2) hat die Form $u(x) = u^0(x) + \sum_{m=1}^M y_m u^m(x)$ mit $y \in \mathbb{R}^M$ als Lösung von $\big(B_a + B_b U(b)\big) y = g - B_b u^0(b)$. Also gilt: entweder, $Q := B_a + B_b U(b)$ ist regulär (und damit (5.2) eindeutig lösbar), oder Q ist singulär, d. h. falls $Qy = g - B_b u^0(b)$ lösbar ist, ist die Lösung nicht eindeutig, und sonst existiert keine Lösung (Fredholmsche Alternative).

(5.4) Sei u_h^0 diskrete Lösung der AWA $(u^0)' = Au^0 + b$ mit $u^0(a) = 0$, und seien u_h^m diskrete Lösungen der AWA $(u^m)' = Au^m, u^m(a) = e^m$ für $m = 1,\dots,M$. Sei $y_h \in \mathbb{R}^M$ Lösung von $Q_h y_h = g - B_b u_h^0(b)$ mit $Q_h = B_a + B_b U_h(b)$ und $U_h = (u_h^1,\dots,u_h^M)$, und sei $u_h = u_h^0 + \sum_{m=1}^M y_{h,m} u_h^m$. Es gelte $|u^m(x_n) - u_h^m(x_n)| = O(h^p)$ für $m = 0,\dots,m$, $x_n = a + nh$. Dann gilt: Wenn $Q = B_a + B_b U(b)$ regulär ist, dann existiert ein $h_0 > 0$, sodass Q_h für $h < h_0$ regulär ist, und es gilt für die Lösung der RWA $|u(x_n) - u_h(x_n)| = O(h^p)$.

5 Randwert-Aufgaben: Schieß-Verfahren

(5.5) Seien $I=[a,b]$, $f\in C(I\times\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^M)$ und $g\in C(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^M)$ gegeben. Dann lautet die allgemeine RWA:
Bestimme $u\in C^1(I,\mathbb{R}^M)$ mit $u'=f(x,u)$ in $I=[a,b]$ und $g\big(u(a),u(b)\big)=0$.

(5.6) Sei $f\in C^1(I\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$. Dann ist die Lösung u^v der AWA $(u^v)'(x)=f(x,u^v(x))$ mit $u^v(a)=v$ nach v differenzierbar mit $J=D_v u^v\in C^1(I,\mathbb{R}^{M,M})$. J erfüllt die lineare Matrix - AWA

$$J'(x)=D_2 f\big(x,u^v(x)\big)J(x) \qquad J(a)=I_M$$

und es gilt $Je^k=\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{1}{\delta}(u^{v+\delta e^k}-u^v)$.

Schieß-Verfahren für allgemeine RWA

S0) wähle Startwert $v\in\mathbb{R}^M$

S1) berechne Approximation u^v der AWA mit $(u^v)'=f(x,u^v)$, $\quad u^v(a)=v$
berechne $G(v):=g\big(v,u^v(b)\big)$
falls $|G(v)|$ klein genug: STOP

S2) berechne eine Approximation ΔG von $DG(v)$ spaltenweise:

$$\text{Für } \delta>0 \text{ und } e^k \text{ setze } \Delta G(v)e^k=\frac{1}{\delta}\,\big(G(v+\delta e^k)-G(v)\big)$$

S3) berechne $v:=v-\big(\Delta G(v)\big)^{-1}G(v)$. Gehe zu S1).

5 Randwert-Aufgaben: Mehrzielmethode

S0) Wähle eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_R = b$.
Wähle Startwerte $v = (v^0, ..., v^R) \in \mathbb{R}^{M(R+1)}$.
S1) berechne Approximation u^r der AWA mit

$$(u^r)' = f(x, u^r), \quad u^v(x_{r-1}) = v^{r-1} .$$

berechne $G(v) := (G_r(v))_{r=0,...,R}$ mit $G_0(v) = g(v^0, v^R)$ und
$G_r(v) = u^r(x_r) - v^r$ für $r = 1, ..., R$.
falls $|G(v)|$ klein genug: STOP
S2) berechne eine Approximation $\Delta G(v)$ von $G'(v)$.
S3) berechne $v := v - \big(\Delta G(v)\big)^{-1} G(v)$. Gehe zu S1).

(5.7) Für lineare RWA $u' = Au + f$ mit $B_a u(a) + B_b u(b) = g$ gilt:
Wenn die RWA eindeutig lösbar ist,
dann ist die Matrix $G'(v)$ regulär.

Für allgemeine RWA $u' = f(x, u)$ mit $g(u(a), u(b)) = 0$ gilt:
Wenn die RWA eine isolierte Lösung besitzt und f, g hinreichend glatt sind,
dann ist die die Matrix $G'(v)$ in einer Umgebung der Lösung regulär.

5 Randwert-Aufgaben: Differenzenverfahren

(5.8) Für $\partial_h u(x) = \frac{1}{2h}\big(u(x+h) - u(x-h)\big)$ gilt $|\partial_h u(x) - u'(x)| \leq \frac{1}{6}\, h^2\, \|u'''\|_\infty$.

(5.9) Sei $I = [a,b]$ ein Intervall, $p \in C^1(a,b)$ mit $p(x) > 0$ und $q, r \in C(a,b)$. Für $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$ ist $Lu = -(pu')' + qu' + ru$ der Sturm-Liouville-Operator.

(5.9) Sei $N > 0$ und $h = \dfrac{b-a}{N+1}$, $x_n = a + nh$, $\Delta = \{x_0, \dots, x_{N+1}\}$.
Zu einer Gitterfunktion $u^h\colon \Delta \to \mathbb{R}^{N+2}$ betrachte die *Differenzengleichung* $L_h u^h = f^h$ mit

$$L_h u^h(x_n) = -\partial_{h/2}(p\partial_{h/2} u^h)(x_n) + q(x_n)\partial_h u^h(x_n) + r(x_n) u^h(x_n)\,, \qquad n = 1, \dots, N$$

und $u_0 = u_{N+1} = 0$. Setze $\|u^h\|_{\infty,\Delta} := \max\limits_{1\leq n\leq N} |u^h(x_n)|$.

(5.10) a) Ein Differenzenverfahren heißt konsistent von der Ordnung p, wenn für die Interpolation $I_h u$ $\big(\text{mit } (I_h u)(x_n) = u(x_n)\big)$ der exakten Lösung u gilt:

$$\|L_h(I_h u) - f^h\|_{\infty,\Delta} = O(h^p)\,.$$

b) Es heißt stabil, wenn $\|L_h^{-1}\|_{\infty,\Delta} \leq C$ unabhängig von $0 < h < h_0$.

(5.11) Das Differenzenverfahren (5.11) sei konsistent von der Ordnung p und stabil. Dann ist es konvergent, d.h. $\|u^h - u\|_{\infty,\Delta} = O(h^p)$ für $h \to 0$.

5 Randwert-Aufgaben

(5.12) Für $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gelte:

a) A ist stark diagonal-dominant, d.h.

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |A[n,k]| \leq |A[n,n]|\,, \qquad n = 1,...,N\,,$$

und es existiert ein $j \in \{1,\dots,N\}$ mit $\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |A[j,k]| < |A[j,j]|$.

b) A ist irreduzibel, d.h. zu jedem Paar $j \neq n$ existiert ein Folge $j = j_0, j_1, j_2, \dots, j_R = n$ mit $A[j_1, j_0] \neq 0, ..., A[j_R, j_{R-1}] \neq 0$.

Dann gilt:

1) A ist regulär.
2) Sei $A[n,n] > 0$ für alle n. Dann ist A positiv definit.
3) Sei $A[n,n] > 0$ und $A[n,k] \leq 0$ für $n \neq k$. Dann ist $A^{-1} \geq 0$ (elementweise).

Anwendung auf $L_h u^h(x_n) = \partial_{h/2}(p\partial_{h/2}u^h)(x_n) + r(x_n)u^h(x_n)$ für $p > 0$, $r \geq 0$:
Es gilt $L_h^{-1} f^h \geq 0$ für $f^h \geq 0$ und $\|L_h^{-1}\|_{\infty,\Delta} \leq \|L_h^{-1} e^h\|_{\infty,\Delta}$ mit $e^h \equiv 1$.

5 Randwert-Aufgaben: Variationsmethoden

Sei $\hat V = \{\varphi \in C(I)\colon \varphi(a) = \varphi(b) = 0, \quad \varphi \text{ stückweise differenzierbar }\}$.
Für $u, v \in \hat V$ definiere die Bilinearform $a(u,v) = \displaystyle\int_a^b (pu'v' + qu'v + ruv)\,dx$
und die Linearform $\ell(v) = \int_a^b fv\,dx$. Sei $\|v\| = (\int_a^b v^2\,dx)^{1/2}$.

(5.12) a) Es gilt die Poincaré-Ungleichung

$$\|v\| \le \frac{b-a}{2}\,\|v'\| \qquad \text{für alle } v \in \hat V\,.$$

b) $\ell(\cdot)$ ist stetig bzgl. $v \longmapsto \|v'\|$, d. h. $|\ell(v)| \le C\|v'\|$ für $v \in \hat V$.
c) $a(\cdot,\cdot)$ ist stetig bzgl. $v \longmapsto \|v'\|$, d. h.

$$|a(u,v)| \le C\,\|u'\|\;\|v'\| \qquad \text{für alle } v \in \hat V\,.$$

d) sei zusätzlich $\min p(x) \ge \rho > 0$ und $\rho + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \min(r - \frac{1}{2}q') > 0$.
Dann ist $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch bzgl. $v \longmapsto \|v'\|$, d.h.

$$a(v,v) \ge c\|v'\|^2 \qquad \text{für alle } v \in \hat V\,.$$

(5.13) Wenn $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch ist, hat die Sturm-Liouville RWA eine eindeutige Lösung $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$.

5 Randwert-Aufgaben: Variationsmethoden

(5.14) Sei $V_h \subset \hat{V}$ und sei $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u_h \in V_h$ der Variationsgleichung $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$.

(5.15) Sei $u \in C^2(I)$ Lösung der Sturm-Liouville RWA und sei $u_h \in V_h$ Lösung von (5.14). Dann gilt für den Fehler $e_h = u - u_h$ die *Galerkin-Orthogonalität* $a(e_h, v_h) = 0$ für $v_h \in V_h$.

(5.16) Sei $a(\cdot,\cdot)$ beschränkt und elliptisch.

Dann gilt für den Galerkin-Fehler $\|e_h'\| \leq \dfrac{C}{c} \inf_{v_h \in V_h} \|u' - v_h'\|$.

(5.17) $a(\cdot,\cdot)$ sei symmetrisch und elliptisch auf $\hat{V}$.
Dann gilt für $F(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$ und $u \in \hat{V}$:

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in \hat{V} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in \hat{V}\,.$$

(5.18) Sei $V_h \subset \hat{V}$ der Raum der linearen Finiten Elemente mit der Gitterweite h.
Sei $I_h \colon \hat{V} \longrightarrow V_h$ die lineare Interpolation und sei $u \in C^2(I)$. Dann gilt:

a) $\|u - I_h u\| \leq h^2 \, \|u''\|$
b) $\|(u - I_h u)'\| \leq h \, \|u''\|$
c) $\|u - I_h u\|_\infty \leq \frac{1}{2} h^2 \, \|u''\|_\infty$

(5.19) $a(\cdot,\cdot)$ sei elliptisch. Dann gilt für die Lösung $u \in C^2(I)$ der RWA $\|u''\| \leq C\|f\|$.

5 Randwert-Aufgaben: Variationsmethoden

(5.20) Unter der Voraussetzung von (5.16) gilt für die Galerkin-Lösung $u_h \in V_h$

a) $\|u' - u_h'\| \le C\,h\|f\|$

b) $\|u - u_h\| \le C\,h^2\,\|f\|$.

(5.21) Zu $-\varepsilon u'' + u' + u = f$ mit $u(a) = u(b) = 0$ betrachte

$$\int_a^b \big(\varepsilon u_h' v_h' + (u_h' + u_h)(v_h + \delta v_h')\big)\,dt = \int_a^b f(v_h + \delta v_h')\big)\,dt \text{ für } v_h \in V_h.$$

Dann gilt für $\varepsilon \le h$, $\delta = h$ und $\|v\|_\delta = \big(\varepsilon\,\|v'\|^2 + \delta\,\|v'\|^2 + \|v\|^2\big)^{1/2}$

$$\|u - u_h\|_\delta \le C\,h^{3/2}\,\|\ddot{u}\|\ .$$

5 Anfangs-Randwert-Aufgaben

Betrachte die parabolische Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t)\,, \qquad (x,t)\in(a,b)\times(0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \qquad x\in(a,b) \\ u(a,t) &= g_a(t)\,, \quad u(b,t)=g_b(t)\,, \qquad t\in(0,T] \end{aligned}$$

Wähle $N,J>0$, $h=(b-a)/(J+1)$, $\tau=T/N$, $x_j=a+jh$, $t_n=n\tau$.
Zu $\theta\in[0,1]$ bestimme u_j^n für $j=1,...,J$ und $n=1,...,N$ mit

$$\frac{1}{\tau}\Big(u_j^n-u_j^{n-1}\Big) = \frac{1-\theta}{h^2}\Big(u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}\Big)+\frac{\theta}{h^2}\Big(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\Big)$$

mit Anfangs- und Randwerten

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u_0(x_j)\,, \qquad j=1,...,J\,, \\ u_0^n &= g_a(t_n)\,, \quad u_{J+1}^n=g_b(t_n)\,, \qquad n=1,...,N \end{aligned}$$

Setze $u^n=(u_1^n,...,u_J^n)$, $G=\mathrm{tridiag}(-1,2,-1)$, $A=I+\theta\alpha G$, $B=I-(1-\theta)\alpha G$
und $b^n=(\theta g_a(t_n)+(1-\theta)g_a(t_{n-1}),0,...,0,\theta g_b(t_n)+(1-\theta)g_b(t_{n-1}))$.
Dann gilt

$$Au^n = Bu^{n-1}+b^n\,, \qquad n=1,...,N\,.$$

5 Anfangs-Randwert-Aufgaben

(5.22) Sei $\theta \geq 1/2$ oder $\alpha < 1/(2-4\theta)$ falls $\theta < 1/2$. Dann gilt $\rho(A^{-1}B) < 1$, d.h. die numerische Lösung ist stabil.

(5.23) Für den lokalen Diskretisierungsfehler einer Lösung von $\partial_t u = \partial_x^2 u$

$$\begin{aligned} g_j^n \quad = \quad & \frac{1}{\tau}\Big(u(x_j,t_n) - u(x_j,t_{n-1})\Big) - \frac{\theta}{h^2}\Big(u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)\Big) \\ & - \frac{1-\theta}{h^2}\Big(u(x_{j+1},t_{n-1}) - 2u(x_j,t_{n-1}) + u(x_{j-1},t_{n-1})\Big) \end{aligned}$$

gilt $|g_j^n| = O(\tau^\beta + h^2)$ mit $\beta = 2$ für $\theta = 1/2$ and $\beta = 1$ sonst.

(5.24) Aus Stabilität (5.22) und Konsistenz (5.23) folgt Konvergenz:

$$\Big(\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} |u_j^n - u(x_j,t_n)|^2\Big)^{1/2} = O(\tau^\beta + h^2).$$

5 Anfangs-Randwert-Aufgaben

Sei $(f,g) = \int_a^b fg\,dx$ das $L_2(a,b)$-Skalarprodukt und $a(\cdot,\cdot)$ beschränkt und elliptisch in

$$V = \{v \in C[a,b]\colon\ v(a) = v(b) = 0, v(t) = \int_0^t w(s)\,ds \text{ mit } w \in L_2(a,b)\}\,.$$

Bestimme $u\colon [0,T] \longrightarrow V$ mit $\partial_t u(t) \in L_2(a,b)$, $u(0) = u_0$ und

$$(\partial_t u(t), v) + a(u(t), v) = 0\,, \quad v \in V\,.$$

Sei $V_h \subset V$ ein Finite-Elemente-Raum, und sei
$P_h\colon V \longrightarrow V_h$ mit $a(P_h w, v_h) = a(w, v_h)$ für $v_h \in V$ die *Galerkin-Projektion*.
Sei $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$ und setze $\partial^\tau u(t) = \frac{1}{\tau}(u(t) - u(t-\tau))$.
Bestimme $u_h^n \in V_h$ $(n = 0,\dots,N)$ mit $u_h^0 = u_{h,0} \in V_h$ und

$$(\partial^\tau u_h^n, v_h) + a(u_h^n, v_h) = 0\,, \quad v_h \in V_h\,.$$

(5.26) Es existiere eine eindeutige Lösung u der Anfangs-Randwertaufgabe mit $\partial_t\partial_x^2 u, \partial_t^2 u \in L_2((0,T)\times(a,b))$.
Es gelte $\partial_x^2 u_0 \in L_2(a,b)$, $\|u_0 - u_{0,h}\| \le C\,h^2\|\partial_x^2 u_0\|$, und
für alle $v \in V$ mit $\partial_x^2 v \in L_2(a,b)$ gelte $\|v - P_h v\| \le C\,h^2\|\partial_x^2 v\|$.
Dann gilt

$$\|u(t_n) - u_h^n\| \le C\,h^2\left(\|\partial_x^2 u_0\|_2 + \int_0^{t_n}\|\partial_t\partial_x^2 u(s)\|_2\,ds\right) + C\tau\int_0^{t_n}\|\partial_t^2 u(s)\|_2\,ds\,.$$