1 Einführung

Sei $\Omega \times [0,1] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ein Raum-Zeit-Zylinder. Wir betrachten eine Zustandsgröße $u \colon \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, eine Dichte $S(u(x,t))$, einen Fluss $J(x,t)$ und einen Quelle bzw. Senke $Q(x,t,u(x,t))$. Alle Größen seien hinreichend glatt.
In jedem Kontroll-Volumen $V \subset \Omega$ gilt die Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt}\int_V S(u)\,dx = -\int_{\partial V} J\cdot\nu\,da + \int_V Q(u)\,dx\,.$$

Für den Fluss J können wir den Satz von Gauß einsetzen:

$$\int_{\partial V} J\cdot\nu\,da = \int_V \nabla\cdot J\,dx\,.$$

Damit ergibt sich die *Erhaltungsgleichung*

$$\partial_t S(u(x,t)) + \nabla\cdot J(x,t) - Q(x,t,u(x,t)) = 0\,.$$

Die Gleichung wird durch ein *konstitutives Gesetz* $J = C(u) - K(\nabla u)$ geschlossen:

$$\partial_t S(u(x,t)) + \nabla\cdot\big(C(u) - K(\nabla u)\big) - Q(x,t,u(x,t)) = 0\,.$$

Auf $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ gelten die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\big(C(u) - K(\nabla u)\big)\cdot\nu &= g_1 \text{ auf } \Gamma_1 \text{ (Neumann)}\\
\big(C(u) - K(\nabla u)\big)\cdot\nu + \alpha u &= g_2 \text{ auf } \Gamma_2 \text{ (Robin)}\\
u &= g_3 \text{ auf } \Gamma_3 \text{ (Dirichlet)}
\end{aligned}$$

1 Einführung

(1.1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, beschränkte Menge mit stückweisem glatten Rand. Sei $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ für } x \in \Omega, \qquad u(x) = g(x) \text{ für } x \in \partial\Omega$$

(klassische) Lösung des Poisson-Problems (mit Dirichlet-Randbedingungen).

(1.2) Sei $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $\Delta u \geq 0$. Dann gilt

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)\,.$$

(1.3) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist ein Lipschitz-Gebiet, wenn gilt:

a) Ω ist offen in $\mathbb{R}^d$.

b) Ω ist zusammenhängend.

c) $\partial\Omega$ ist eine Lipschitz-Mannigfaltigkeit, d.h., für alle $y \in \partial\Omega$ existiert eine lokale Karte $\psi \in C^{0,1}(V, \partial\Omega)$ mit $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$ offen und $y \in \psi(V)$.

(1.4) In einem Lipschitz-Gebiet hat das Poisson-Problem mit Dirichlet-Randbedingungen eine eindeutige Lösung.

2 Finite-Differenzen-Diskretisierungen

(2.1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \Omega$ und $h > 0$ genügend klein. Dann definiere

$$\partial_{h,i}^{+} u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x+he^i) - u(x)\big)\,,$$

$$\partial_{h,i}^{-} u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x) - u(x-he^i)\big)\,,$$

$$\partial_{h,i}^{0} = \frac{1}{2}\big(\partial_{h,i}^{+} + \partial_{h,i}^{-}\big)\,,\ \text{d.h. } \partial_{h,i}^{0} u(x) = \frac{1}{2h}\big(u(x+he^i) - u(x-he^i)\big)\,,$$

$$\partial_{h,i}^{2} = \partial_{h,i}^{+}\partial_{h,i}^{-}\,,\ \text{d.h. } \partial_{h,i}^{2} u(x) = \frac{1}{h^2}\big(u(x+he^i) - 2u(x) + u(x-he^i)\big)\,,$$

$$\Delta_h u(x) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{h,i}^{2} u(x)\,.$$

Eine Finite-Differenzen-Diskretisierung von $Lu = -\nabla\cdot(K\nabla u + cu) + qu$ ist

$$L_h u(x) = \sum_{i=1}^{d}\Big(-\partial_{h/2,i}^{+}\big(K(x)\partial_{h/2,i}^{+}u(x)\big) - K\big(x-\frac{h}{2}e^i\big)\partial_{h,i}^{-}u(x) + c(x)\partial_{h,i}^{0}u(x)\Big) + (\nabla c + q)(x)u(x)\,.$$

(2.2) Sei $\Omega_h = a + h\mathbb{Z}^d$ ein Gitter mit $x \pm he^i \in \bar\Omega$ für alle $x \in \Omega_h$.
Sei $K \in C^3(\bar\Omega)$, $c \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}^d)$, $q \in C(\bar\Omega)$. Dann gilt für $u \in C^4(\bar\Omega)$

$$\|L_h u - Lu\|_{\infty,\Omega_h} \le C\,h^2 \sum_{i=1}^{d}\big(\|\partial_i^4 u\|_{\infty,\Omega} + \|\partial_i^3 u\|_{\infty,\Omega}\big)\,.$$

2 Finite-Differenzen-Diskretisierungen

(2.3) Eine Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{N,N}$ heißt

a) stark diagonal-dominant, wenn

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |\underline{A}[n,k]| \leq |\underline{A}[n,n]| \qquad \text{für alle } n = 1,...,N,$$

und wenn ein $n_0 \in \{1,\dots,N\}$ mit $\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |\underline{A}[n_0,k]| < |\underline{A}[n_0,n_0]|$ existiert;

b) irreduzibel, wenn zu jedem Paar $j \neq n$ eine Folge $j = j_0, j_1, j_2, \dots, j_R = n$ existiert so dass $\underline{A}[j_1, j_0] \neq 0, ..., \underline{A}[j_R, j_{R-1}] \neq 0$ gilt;

c) *M-Matrix*, wenn $\underline{A}[n,n] > 0$ für alle n, und $\underline{A}[n,k] \leq 0$ für $n \neq k$, wenn $\underline{A}$ regulär ist und $\underline{A}^{-1}[n,k] \geq 0$ für alle n,k gilt.

(2.4) Sei $\underline{A}$ eine irreduzible stark diagonaldominante Matrix mit $\underline{A}[n,n] > 0$ für alle n und $\underline{A}[n,k] \leq 0$ für $n \neq k$. Dann ist $\underline{A}$ eine M-Matrix.

Sei $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ mit $b_1 = a_1 + (N_1+1)h$, $b_2 = a_2 + (N_2+1)h$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$.
Sei $\Omega_h = (a + h\mathbb{Z}^2) \cap \Omega$, $\partial\Omega_h = (a + h\mathbb{Z}^2) \cap \partial\Omega$ und $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h$.
Sei $V_h = \{u_h \colon \bar{\Omega}_h \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $V_h' = \{u_h \colon \Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}\}$, und
$V_h(0) = \{u_h \in V_h \colon u_h(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega_h\}$.
Sei $I_h \colon C(\bar{\Omega}) \longrightarrow V_h$ die Gitterinterpolation. Eine Numerierung der Gitterpunkte definiert $E_h \colon \mathbb{R}^N \longrightarrow V_h(0)$ und $E_h' \colon V_h' \longrightarrow \mathbb{R}^N$ und damit $\underline{A} = E_h' L_h E_h$.

2 Finite-Differenzen-Diskretisierungen

(2.5) Sei $L\colon C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$ ein Differentialoperator 2. Ordnung, und sei $L_h\colon V_h \longrightarrow V_h'$ ein Finite-Differenzen-Operator.
Dann heißt L_h

a) konsistent von der Ordnung p, wenn

$$\|I_h L u - L_h I_h u\|_{\infty,\Omega_h} \le C(u) h^p$$

für alle hinreichend glatten u.

b) konvergent von der Ordnung p, wenn

$$\|I_h u - u_h\|_{\infty,\Omega_h} \le C(u) h^p$$

für alle hinreichend glatten u und der diskreten Lösung u_h mit $L_h u_h(x) = Lu(x)$ für $x \in \Omega_h$ und $u_h(x) = u(x)$ für $x \in \partial\Omega_h$.

c) stabil, wenn eine Konstante $\hat C > 0$ (unabhängig von h) existiert mit

$$\|v_h\|_{\infty,\Omega_h} \le \hat C \,\|L_h v_h\|_{\infty,\Omega_h} \qquad \text{für alle } v_h \in V_h'.$$

(2.6) Sei L_h konsistent (von der Ordnung p) und stabil.
Dann ist L_h konvergent (von der Ordnung p).

(2.7) $L_h\colon V_h \longrightarrow V_h'$ heißt *invers monoton*, wenn gilt:

$$L_h v_h(x) \ge 0 \text{ für } x \in \Omega_h \text{ und } v_h(x) \ge 0 \text{ für } x \in \partial\Omega_h \quad \Rightarrow \quad v_h(x) \ge 0 \text{ für } x \in \Omega_h .$$

(2.8) Sei $w_h \in V_h$ mit $L_h w_h(x) \ge 1$ für $x \in \Omega_h$ und $w_h(x) \ge 0$ für $x \in \partial\Omega_h$.
Dann ist L_h stabil mit $\hat C = \|w_h\|_{\infty,\Omega_h}$.

2 Finite-Differenzen-Diskretisierungen

(2.9) Seien $B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$ und $C \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_4}$. Dann ist

$$B \otimes C = (B[n,k]C)_{n=1,\dots,N_1,\ k=1,\dots,N_2} \in \mathbb{R}^{N_1 N_3 \times N_2 N_4}$$

das *Kronecker-Produkt* von B und C.

(2.10) Seien $B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$ und $C \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten λ_n, μ_k und Eigenvektoren q^n, p^k von B bzw. C. Dann sind $q^n \otimes p^k$ die Eigenvektoren zu $B \otimes C$ zu den Eigenwerten $\lambda_n \mu_k$.

(2.11) Sei $T_N = \mathrm{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Dann gilt für $Q_N = \sqrt{\frac{2}{N}} \Big(\sin kn\theta \Big)_{n,k=1,\dots,N}$ und $D_N = \mathrm{diag}(\lambda_n)$ mit $\lambda_n = 2 - 2\cos(n\theta)$ und $\theta = \pi/(N+1)$

$$Q_N^T T_N Q_N = D_N \,.$$

Für die Matrixdarstellung des 5-Punkte Sterns $-\Delta_h$ gilt

$$A = T_N \otimes I_N + I_N \otimes T_N = (Q_N^T \otimes Q_N^T)(D_N \otimes I_N + I_N \otimes D_N)(Q_N \otimes Q_N)\,.$$

Daher löst sich das Gleichungssystem $Ax = b$ durch

$$\begin{aligned} Y &= Q_N^T (Q_N^T B^T)\,, \\ Z[k,n] &= Y[k,n]/(\lambda_k + \lambda_n) \qquad \text{für } n,k = 1,\dots,N\,, \\ X &= Q_N (Q_N Z^T)\,. \end{aligned}$$

Dabei werden $x, b \in \mathbb{R}^{N^2}$ durch zeilenweise Anordung als Matrizen $X, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ dargestellt.

3 Die Finite-Elemente-Methode

(3.1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygongebiet, d.h. offen, zusammenhängend, und $\partial\Omega$ sei ein Polygonzug. Dann heißt $\mathscr{T}_h = \{K_1, ..., K_M\}$ eine *zulässige Triangulierung* von Ω, wenn

a) $K_m = \mathrm{conv}\{z^{m,0}, z^{m,1}, z^{m,2}\} \subset \bar\Omega$ Dreieck mit $\mathrm{int}(\Omega) \neq \emptyset$ für $m = 1, ..., M$,

b) $\bar\Omega = \bigcup_{m=1}^M K_m$

c) für $m \neq k$ ist $\mathrm{int}(K_m) \cap \mathrm{int}(K_k) = \emptyset$ und $K_m \cap K_k = \mathrm{conv}\left(\{z^{m,0}, z^{m,1}, z^{m,2}\} \cap \{z^{k,0}, z^{k,1}, z^{k,2}\}\right)$ leer oder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante.

$h = \max_{K\in\mathscr{T}_h} \mathrm{diam}(K)$ ist die *Gitterweite* und $\mathscr{V}_h = \bigcup_{m=1}^M \{z^{m,0}, z^{m,1}, z^{m,2}\}$.

(3.2) $\mathscr{S}_h^1 = \{v \in C(\bar\Omega) \colon v|_K \in \mathbb{P}_1$ für alle $K \in \mathscr{T}_h\}$ ist der Raum der linearen Finiten Elemente.

(3.3) $v \in \mathscr{S}_h^1$ ist eindeutig durch die Werte $v(z)$ an den Knotenpunkten $z \in \mathscr{V}_h$ bestimmt. $\phi_z \in \mathscr{S}_h^1$ mit $\phi_z(z) = 1$ und $\phi_z(y) = 0$ für $y \in \mathscr{V}_h \setminus \{z\}$ ist die Knotenbasis.

(3.5) $w_i \in L_2(\Omega)$ heißt schwache Ableitung von $v \in L_2(\Omega)$ (nach x_i), wenn für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega w_i \psi \, dx = -\int_\Omega v \partial_i \psi \, dx \,.$$

(3.8) $H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) \colon \partial_i v \in L_2(\Omega)\}$ ist ein Hilbert-Raum mit

$$(v,w)_1 = (v,w)_0 + (\nabla v, \nabla w)_0 \,, \qquad \|v\|_1 = \sqrt{(v,v)_1} \,.$$

Es gilt $\mathscr{S}_h^1 \subset H^1(\Omega)$.

(3.9) Sei $h_K = 2\min\{r > 0\colon K \subset B(r,x),\ x \in K\}$ und $\rho_K = 2\max\{r > 0\colon B(r,x) \subset K,\ x \in K\}$.
Eine Familie von Triangulierungen $(\mathscr{T}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ heißt

a) *regulär*, wenn $C > 0$ existiert mit $h_K/\rho_K \le C$,

b) *uniform*, wenn $c > 0$ existiert mit $ch \le \rho_K \le h_K \le h = \max_{K\in\mathscr{T}_h} h_K$.

(3.10) Sei $\hat K = \operatorname{conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ das Referenzdreieck, und sei $\varphi_K\colon \hat K \longrightarrow K$ die linear affine Transformation $\varphi_K(\hat x) = (1-\hat x_1-\hat x_2)z^0 + \hat x_1 z^1 + \hat x_2 z^2$. Dann gilt für $F_K = \varphi_K'$ und $J_K = \det F_K$

$$|F_K| \le Ch_K\,, \qquad |J_K| \le Ch_K^2\,, \qquad |F_K^{-1}| \le C\rho_K^{-1}\,, \qquad |J_K^{-1}| \le C\rho_K^{-2}\,.$$

(3.11) Sei $d = 2$. Für $v \in C(K)$ und $\hat v = v\circ\varphi_K$ gilt

$$ch_K^{-1}\|\hat v\|_{0,\hat K} \le \|v\|_{0,K} \le Ch_K\|\hat v\|_{0,\hat K}\,.$$

Für $v \in C^1(K)$ und $\hat v = v\circ\varphi_K$ gilt $(\nabla u)\circ\varphi_K = F_K^{-T}\hat\nabla\hat v$ und

$$c\rho_K h_K^{-1}\|\hat\nabla\hat v\|_{0,\hat K} \le \|\nabla v\|_{0,K} \le Ch_K\rho_K^{-1}\|\hat\nabla\hat v\|_{0,\hat K}\,.$$

Für $v \in C^2(K)$ und $\hat v = v\circ\varphi_K$ gilt $(\nabla^2 u)\circ\varphi_K = F_K^{-T}\hat\nabla^2\hat v F_K^{-1}$.

$$c\rho_K h_K^{-2}\|\hat\nabla^2\hat v\|_{0,\hat K} \le \|\nabla^2 v\|_{0,K} \le C\rho_K^{-2}h_K\|\hat\nabla^2\hat v\|_{0,\hat K}\,.$$

(3.12) $H^m(\Omega) = \{v \in H^{m-1}(\Omega)\colon \partial_i v \in H^{m-1}(\Omega)\}$ mit $(v,w)_m = (v,w)_0 + \sum_{i=1}^d (\partial_i v, \partial_i w)_{m-1}\,.$

$C^\infty(\Omega)$ ist dicht in $H^m(\Omega)$. Wenn Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, dann ist $C^m(\bar\Omega)$ dicht in $H^m(\Omega)$.

3 Die Finite-Elemente-Methode

(3.13) Sei Ω konvex. Für $v \in H^1(\Omega)$ definiere

$$Qv(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \big(v(y) + \nabla v(y)(x-y)\big)\, dy\,.$$

Dann gilt für $Rv = v - Qv$ und $x \in \Omega$

$$Rv(x) = \int_\Omega k(x,z)(x-z)\nabla^2 v(z)(x-z)\, dz \qquad \text{mit } |k(x,z)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{h_\Omega^2}{\rho_\Omega^2}|x-z|^{-2}\,.$$

(3.14) Es existiert $C > 0$ unabhängig von h_Ω, ρ_Ω, so dass für alle $v \in H^2(\Omega)$ gilt:

a) $\|v - Qv\|_2 \le C\,\|\nabla^2 v\|_0$

b) $\|v\|_\infty \le C\,\|v\|_2$

Für $d \le 3$ gilt $C(\bar\Omega) \subset H^2(\Omega)$.

(3.15) Sei $\operatorname{span}\{\phi_{z^0}, \phi_{z^1}, \phi_{z^2}\} = \mathbb{P}_1$ und $Iv = v(z^0)\phi_{z^0} + v(z^1)\phi_{z^1} + v(z^2)\phi_{z^2}$. Dann gilt

$$\|v - Iv\|_2 \le C\,\|\nabla^2 v\|_0 \quad \text{für } v \in H^2(\Omega)\,.$$

(3.16) Sei $\mathscr{T}_h$ eine uniforme Triangulierung. Dann gilt für $I_h v = \sum_{z\in\mathscr{V}_h} v(z)\phi_z \in \mathscr{S}_h^1$

a) $\|v - I_h v\|_1 \le C\,h\,\|v\|_2$ für alle $v \in H^2(\Omega)$,

b) $\|v - I_h v\|_0 \le C\,h^2\,\|v\|_2$ für alle $v \in H^2(\Omega)$.

(3.16) Sei $(\mathscr{T}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ eine Familie von uniformen Triangulierungen mit $h \longrightarrow 0$.
Dann ist $\bigcup_{h\in\mathscr{H}} S_h^1$ dicht in $H^1(\Omega)$.

3 Die Finite-Elemente-Methode

(3.17) Zu $\Gamma_3 \subset \partial\Omega$ definiere $V_h = \{v_h \in \mathscr{S}_h^1 \colon v_h(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma_3\}$.
Sei $(\mathscr{T}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ eine Familie von uniformen Triangulierungen, so dass $(\mathscr{S}_h^1)_{h\in\mathscr{H}}$ dicht in $H^1(\Omega)$ ist. Dann sei $V \subset H^1(\Omega)$ der kleinste Hilbertraum, der alle V_h ($h \in \mathscr{H}$) enthält.
Die Spurabbilung $\gamma_3 \colon H^1(\Omega) \longrightarrow L_2(\Gamma_3)$ ist wohldefiniert und stetig. Es gilt

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \colon \gamma_3(v) = 0\}\,.$$

(3.18) Sei $\mathrm{meas}_{d-1}(\Gamma_3) > 0$. Dann existiert $C > 0$ mit

$$\|v\|_0 \le C\big(\|\nabla v\|_0 + \|v\|_{0,\Gamma_3}\big) \qquad \text{für alle } v \in H^1(\Omega) \qquad \text{(Poincaré-Friedrichs-Ungleichung)}\,.$$

(3.19) Sei $K \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$, $c \in C(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $q, f \in C(\Omega)$, $g_i \in C(\Gamma_i)$ mit $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, und $\alpha \in C(\Gamma_2)$. Sei $Lu = -\nabla\cdot(K\nabla u) + c\cdot\nabla u + qu$.
Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
Lu &= f \quad \text{in } \Omega\,,\\
K\nabla u\cdot\nu &= g_1 \quad \text{auf } \Gamma_1\,,\\
K\nabla u\cdot\nu + \alpha u &= g_2 \quad \text{auf } \Gamma_2\,,\\
u &= g_3 \quad \text{auf } \Gamma_3\,.
\end{aligned}$$

Dann gilt $a(u,v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$ mit

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \Big(K\nabla u\cdot\nabla u + c\cdot\nabla u v + quv\Big)\,dx + \int_{\Gamma_2} \alpha uv\,da\,,\\
\ell(v) &= \int_\Omega fv\,dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v\,da + \int_{\Gamma_2} g_2 v\,da\,.
\end{aligned}$$

(3.20) Sei $K \in L_\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$, $c \in L_\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $q \in L_\infty(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $g_1 \in L_2(\Gamma_1)$, $g_2 \in L_2(\Gamma_2)$, $\alpha \in L_\infty(\Gamma_2)$. Dann heißt $u \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_3(u) = g_3$ und

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

schwache Lösung der Randwertaufgabe (3.19), und $u_h \in \mathscr{S}_h^1$ mit $\gamma_3(u_h) = I_h g_3$ und

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

heißt *Galerkin-Approximation* von u.

(3.21) Die Bilinearform $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ und die Linearform $\ell : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

(3.22) Es gelte

a) K ist positiv definit, d.h. $z^T K(x) z \geq k_0 |z|^2$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und fast alle $x \in \Omega$,
b) $\nabla \cdot c \in L_\infty(\Omega)$ und $q - \frac{1}{2}\nabla \cdot c \geq 0$ in Ω,
c) $\nu \cdot c \geq 0$ auf Γ_1,
d) $\alpha + \frac{1}{2}\nu \cdot c \geq 0$ auf Γ_2,
e) eine der Bedingungen gelte:
   i) $\text{meas}_{d-1}(\Gamma_3) > 0$,
   ii) es existiert $\Omega' \subset \Omega$ mit $\text{meas}_d(\Omega') > 0$ und $r_0 > 0$ mit $q - \frac{1}{2}\nabla c \geq r_0$ in Ω',
   iii) es existiert $\Gamma' \subset \Gamma_1$ mit $\text{meas}_{d-1}(\Gamma') > 0$ und $c_0 > 0$ mit $c \cdot \nu \geq c_0$ auf Γ',
   iv) es existiert $\Gamma' \subset \Gamma_2$ mit $\text{meas}_{d-1}(\Gamma') > 0$ und $c_0 > 0$ mit $\alpha + \frac{1}{2} c \cdot \nu \geq c_0$ auf Γ'.

Dann ist $a(\cdot,\cdot)$ V-elliptisch, d.h. es existiert $\alpha_0 > 0$ mit $a(v,v) \geq \alpha_0 \|v\|_1^2$ für alle $v \in V$.

3 Die Finite-Elemente-Methode

(3.23) Sei $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch, und sei $u_D \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_3(u_D) = g_3$. Dann existiert $u_h \in V_h$ mit

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) - a(u_D, v_h) \qquad \text{für alle } v_h \in V_h$$

und die Lösung ist eindeutig.

(3.24) Sei $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und elliptisch. Definiere

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v + u_D, v + u_D) - \ell(v) \qquad \text{für } v \in V\,.$$

Dann gilt:

a) $F(u_h) \le F(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$.

b) $(V_h)_h$ sei dicht in V mit $h \longrightarrow 0$.
Dann ist die Folge der Lösungen $u_h \in V_h$ eine Minimalfolge on $F(\cdot)$:
$$\inf_h F(u_h) = \inf_{v \in V} F(v) > -\infty\,.$$

c) Es existiert $u \in V$ mit $F(u) \le F(v)$ für alle $v \in V$. Es gilt $u_h \longrightarrow u$.

d) $u \in V$ ist eindeutig durch
$$a(u, v) = \ell(v) - a(u_D, v) \qquad \text{für alle } v \in V$$
charakterisiert.

(3.25) Sei $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in V$ der Variationsgleichung

$$a(u, v) = \ell(v) - a(u_D, v) \qquad \text{für alle } v \in V\,.$$

3 Die Finite-Elemente-Methode

Sei $u \in V$ die Lösung aus (3.25) und $u_h \in V_h$ die Galerkin-Approximation (3.23).
Dann gilt $a(u - u_h, v_h) = 0$ für alle $v_h \in V_h$ (*Galerkin-Orthogonalität*).

(3.26) Sei $a(\cdot,\cdot)$ beschränkt und elliptisch in V. Dann gilt

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{C_a}{\alpha_0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \,.$$

(3.27) Für die Lösung $u \in V$ aus (3.25) gelte $u \in H^2(\Omega)$. Dann gilt die Fehler-Abschätzung

$$\|u - u_h\|_1 \leq C\, h \|u\|_2 \,.$$

Die Konstante $C > 0$ ist unabhängig von h und hängt nur von der Gitterregularität ab.

(3.28) Sei $f \in L_2(\Omega)$ und $u \in V$ Lösung des Problems $a(u, v) = (f, v)_0$ für alle $v \in V$.
Dann heißt das Problem (bzw. Ω) *H^2-regulär*, wenn für alle $f \in L_2(\Omega)$ die Lösung $u \in H^2(\Omega)$ erfüllt, und wenn $C > 0$ existiert mit

$$\|u\|_2 \leq C \|f\|_0 \,.$$

Wenn Ω konvex ist, dann ist das Laplace-Problem H^2-regulär.
Wenn $\partial\Omega$ und die Koeffizienten von L glatt sind, dann ist das Variationsproblem H^2-regulär.

(3.29) Für die Lösung $u \in V$ aus (3.25) gelte $u \in H^2(\Omega)$. Zusätzlich sei das adjungierte Problem H^2-regulär, d.h. für alle $f \in L_2(\Omega)$ und der Lösung $w \in V$ Lösung des adjungierten Problems

$$a(v, w) = (f, v)_0 \qquad \text{für alle } v \in V$$

sei $w \in H^2(\Omega)$ mit $\|w\|_2 \leq C \|f\|_0$. Dann gilt die Fehler-Abschätzung

$$\|u - u_h\|_0 \leq C\, h^2 \|u\|_2 \,.$$

4 Praktische Aspekte der Finite-Elemente-Methode

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ ein Lipschitz-Gebiet.

(4.1) Eine *Triangulierung* $\mathscr{T}_h$ von Ω ist eine Zerlegung in Zellen (Elemente) $K \subset \bar{\Omega}$ mit

a) K abgeschlossen
b) $\text{meas}_d(K) > 0$
c) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathscr{T}_h} K$
d) $\text{int}(K) \cap \text{int}(K') = \emptyset$ für $K, K' \in \mathscr{T}_h$ und $K \neq K'$.

(4.2)
a) Für eine Finite-Elemente-Triangulierung sei zusätzlich jedem $K \in \mathscr{T}_h$ zugeordnet:
   i) eine Referenzzelle $\hat{K}$ (Dreieck, Viereck, Tetraeder, Pyramide, Prisma, Quader)
   ii) eine invertierbare, orientierungserhaltene Abbildung $\varphi_K \colon \hat{K} \longrightarrow K$.
b) Die Triangulierung heißt *affin*, wenn alle φ_K linear affin sind.
c) Die Triangulierung heißt *zulässig*, wenn der Durchschnitt $K \cap K'$ leer, eine Ecke, eine Kante, oder eine Seite von K bzw. K' ist.

(4.3)
a) Ein *Finites (Referenz-)Element* ist ein Tripel $(\hat{K}, \hat{V}, \hat{\Sigma})$ mit
   i) $\hat{K}$ Referenzzelle
   ii) $\hat{V} = \text{span}\{\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M\}$ Ansatzraum mit Basisfunktionen $\hat{\phi}_m \colon C(\hat{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^s$ (hier: $s = 1$)
   i) $\hat{\Sigma} = \{\hat{\phi}'_1, \dots, \hat{\phi}'_M\} \subset \hat{V}'$ Freiheitsgrade mit $\hat{\phi}'_m(\phi_m) = 1$ und $\hat{\phi}'_m(\phi_n) = 0$ für $n \neq m$.

   Durch die Abbildung $\varphi_K \colon \hat{K} \longrightarrow K$ wird das Finite Element (K, V_K, Σ_K) definiert.
b) Der zugehörige Finite-Elemente-Raum ist
$$X_h = \{v \in X \colon v|_K \in V_K \text{ für alle } K \in \mathscr{T}_h\}.$$
   Dabei ist $X \subset L_2(\Omega)$ ein Banachraum.

4 Praktische Aspekte der Finite-Elemente-Methode

(4.4) a) Sei $X = C(\bar\Omega)$. Ein Finites Element $(\hat K, \hat V, \hat\Sigma)$ heißt *Lagrange-Element*, wenn die Freiheitsgrade $\hat\Sigma$ nur aus Punkt-Auswertungen $\hat\phi'_m(v) = v(y^m)$ besteht. Dann gilt $V_K = \{v \in X\colon v\circ\varphi_K \in \hat V\}$ und $\phi'_m(v) = v(y^m)$ mit $y^m = \varphi_K(\hat y^m)$.
$I_K v = \sum v(y^m)\phi_m$ heißt Lagrange-Interpolation.

b) Finite Elemente heißen äquivalent, wenn sie ein gemeinsames Finites Referenz-Element besitzen. Sie heißen affin-äquivalent, wenn φ_K linear affin ist.

Sei $|v|_m = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_0^2\Big)^{1/2}$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_d$ und $\partial^\alpha v = \partial^{\alpha_1}\cdots\partial^{\alpha_d} v$.

(4.5) Bramble-Hilbert-Lemma: Sei $I_K(p) = p$ für $p \in \mathbb{P}_k$. Dann existiert $C > 0$ mit

$$\|I_K v - v\|_{k+1} \le C\,|I_K v - v|_{k+1} \qquad \text{für alle } v \in H^{k+1}(\Omega)\,.$$

(4.6) Die Einbettung $H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ ist kompakt.

(4.7) Transformationsformel: Für $|\alpha| = m$, $v \in H^m(\Omega)$ und $\hat v = v\circ\varphi_K$ gilt

$$\min_{\hat x\in\hat K} |F_K(\hat x)^{-1}|^m J_K(\hat x)^{1/2} \|\partial^\alpha v\|_{0,K} \le \|\hat\partial^\alpha \hat v\|_{0,\hat K} \le \max_{\hat x\in\hat K} |F_K(\hat x)|^m J_K(\hat x)^{-1/2} \|\partial^\alpha v\|_{0,K}\,.$$

(4.8) Eine Familie $(\mathscr{T}_h)_h$ von Triangulierungen heißt

a) regulär, wenn $\min|F_K(\hat x)^{-1}|\max|F_K(\hat x)| \le C$ unabhängig von $K \in \mathscr{T}_h$ und h.

b) uniform, wenn $C \ge c > 0$ existiert mit $ch \le (\min|F_K(\hat x)^{-1}|)^{-1} \le \max|F_K(\hat x)| \le Ch$.

(4.9) Sei $I_{\hat K}(p) = p$ für $p \in \mathbb{P}_k$. Dann gilt für uniforme Triangulierungen und $m = 0,\dots,k$

$$\|I_K v - v\|_m \le C\,h^{k+1-m} |v|_{k+1} \qquad \text{für alle } v \in H^{k+1}(\Omega)\,.$$

(4.10) Sei $u \in V$ die Lösung aus (3.25) und $u_h \in V_h$ die Galerkin-Approximation (3.23).
Es gelte (4.9) und $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Dann gilt die Fehler-Abschätzung $\|u - u_h\|_1 \le C\,h^k\,|u|_{k+1}$.

4 Praktische Aspekte der Finite-Elemente-Methode

(4.11) Ein Finites Element heißt *isoparametrisches Element*, wenn $\varphi_K \in \hat{V}^d$ gilt.

(4.12) Für ein isoparametrisches Lagrange-Element gilt $\varphi_K(\hat{x}) = \sum_j \hat{\phi}_j(\hat{x}) y^j$.

(4.13) Sei $\hat{Q}(\hat{v}) = \sum\limits_{\xi \in \Xi} \omega_\xi \, \hat{v}(\xi)$ eine Kubaturformel mit Punkten $\Xi \subset \hat{K}$ und Gewichten ω_ξ.

$$\hat{E}(\hat{v}) = \int \hat{v}(\hat{x}) \, d\hat{x} - \hat{Q}(\hat{v}) \,, \qquad \hat{v} \in C(\hat{K})$$

ist der Kubaturfehler. Die Genauigkeit der Kubatur ist das größte k mit $\hat{E}(p) = 0$ für $p \in \mathbb{P}_k$.

$$a_h(v,w) = \sum_{K \in \mathscr{T}_h} \sum_{\xi \in \Xi} \omega_\xi J_K(\xi) K(\varphi_K(\xi)) F_K(\xi)^{-T} \hat{\nabla}(v \circ \varphi_K)(\xi) \cdot F_K(\xi)^{-T} \hat{\nabla}(w \circ \varphi_K)(\xi)$$

(4.14) 1. Lemma von Strang: Sei $u \in V$ mit $a(u,v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$, und sei $u_h \in V_h$ mit $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$. Wenn $a(u,v) \le C_1 \|u\|_1 \|v\|_1$ und $a_h(v_h, v_h) \ge \alpha_0 \|v_h\|_1^2$ für alle $h \in (0, h_0)$ gilt, dann existiert $C > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_1 \le C \inf_{v_h \in V_h} \Big(\|u - v_h\|_1 + \sup_{\|w_h\|_1 = 1} |a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)| + \sup_{\|\tilde{w}_h\|_1 = 1} |\ell(\tilde{w}_h) - \ell_h(\tilde{w}_h)| \Big) .$$

(4.15) Sei $\hat{E}(p) = 0$ für $p \in \mathbb{P}_{2k-2}$. Dann gilt für affine Elemente K, $p, q \in \mathbb{P}_{k-1}$ und $a \in C^k(K)$

$$E_K(apq) \le C \, h^k \, \|a\|_{k,\infty,K} \|p\|_{k-1} \|q\|_0 \qquad \text{mit } E_K(v) = J_K \, \hat{E}(v \circ \phi_K) \,.$$

(4.16) Sei (4.14) und (4.15) erfüllt, und sei zusätzlich $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Dann gilt $\|u - u_h\|_1 \le C \, h^k \, |u|_{k+1}$.

(4.17) Wenn zusätzlich das duale Problem H^2-regulär ist und $|a(v,w) - a_h(v,w)| \le Ch^k \|v\|_2 \|w\|_2$ und $|\ell(v) - \ell_h(v)| \le Ch^2 \|v\|_2$ erfüllt ist, gilt $\|u - u_h\|_0 \le C \, h^{k+1} \, |u|_{k+1}$.

4 Praktische Aspekte der Finite-Elemente-Methode

(4.18) Sei $X_h = \operatorname{span}\{\phi_j\}$ ein Lagrange-Finite-Elemente-Raum und $\Pi_h \colon L_1(\Omega) \longrightarrow X_h$ mit

$$\Pi_h v = \sum_{j=1}^{N} P_j v\, \phi_j\,, \qquad P_j v = \frac{1}{\operatorname{meas}_d(\omega_j)} \int_{\omega_j} v\, dx\,, \qquad \omega_j = \operatorname{supp} \phi_j$$

die Clément-Interpolation. Sei $\omega_K = \bigcup_{\omega_j \supset K} \omega_j$. Dann gilt für $v \in H^1(\Omega)$:

a) $\|v - \Pi_h v\|_{0,K} \le C h_K \, \|\nabla v\|_{0,\omega_K}$

b) $\|v - \Pi_h v\|_{0,F} \le C h_K^{1/2} \, \|\nabla v\|_{0,\omega_K}$ für jede Seitenfläche $F \subset \partial K$.

(4.19) Ein Fehlerschätzer $\eta = \left(\sum \eta_K^2\right)^{1/2}$ heißt

a) *zuverlässig*, wenn $C > 0$ exisitiert mit $\|u - u_h\|_1 \le C\eta$

b) *effizient*, wenn $c > 0$ existiert mit $\|u - u_h\|_{1,\omega_K} \ge c\,\eta_K$ für eine Umgebung $\omega_K \supset K$

c) *asymptotisch exakt*, wenn $\|u - u_h\|_1 / \eta \longrightarrow 1$ gilt.

(4.20) Sei $Lu = -\Delta u + qu$. Dann gilt für die schwache Lösung $u \in V$ von $Lu = f$ und $u_h \in V_h$

$$a(u - u_h, v) \le C \Big(\sum_{K \in \mathscr{T}_h} h_K^2 \|r_K(u_h)\|_{0,k}^2 + \sum_{F \in \mathscr{F}_h} h_F \|\, [\nu \cdot \nabla u_h]_F \,\|_{0,F}^2 \Big)^{1/2} \|v\|_1$$

mit $r_K(u_h) = (Lu_h - f)|_K$ und $[\nu \cdot w]_F(x) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \nu \cdot \big(w(x + t\nu) - w(x - t\nu)\big)$.

(4.21) Der residuale Fehlerschätzer ist zuverlässig:

$$\eta = \left(\sum \eta_K^2\right)^{1/2} \quad \text{mit} \quad \eta_K = h_K \|r_K(u_h)\|_{0,k} + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathscr{F}_K} h_F^{1/2} \|\, [\nu \cdot \nabla u_h]_F \,\|_{0,F}\,.$$

5 FE-Diskretisierungen der Stokes-Gleichungen

(5.1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet, und seien $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $g \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)$ gegeben. Wenn $(u,p) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d) \times C^1(\Omega)$ die Stokes-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + \nabla p &= f \text{ in } \Omega \\
\nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega \\
u &= g \text{ auf } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

erfüllt, dann heißt (u,p) klassische Lösung der Stokes-Gleichungen.

(5.2) Sei $X = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und definiere $V = \{v \in X\colon\ \nabla \cdot v \equiv 0\}$. Sei (u,p) eine klassische Lösung von (5.1) mit $g \equiv 0$. Dann gilt

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \text{für alle } v \in V$$

mit $a(v,w) = \int_\Omega \nabla v : \nabla w \, dx$ und $\ell(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx$. Definiere $b(v,q) = \int_\Omega \nabla \cdot v q \, dx$. Zu jedem $f \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in V$.

(5.3) Seien $X_h \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $Q_h \subset L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ Finite-Elemente-Räume. Definiere $V_h = \{v_h \in X_h\colon\ b(v_h, q_h) = 0 \text{ für alle } q_h \in Q_h\}$. Dann existiert genau ein $u_h \in V_h$ mit

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \qquad \text{für alle } v_h \in V_h\,.$$

Zudem ist $u_h \in V_h$ Minimierer von $F(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - \ell(v_h)$ in V_h.

(5.4) Wenn $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$ ein Sattelpunkt von dem Lagrangefunktional $L(v_h, q_h) = F(v_h) + b(v_h, q_h)$ ist, d.h.

$$L(u_h, q_h) \le L(u_h, p_h) \le L(v_h, p_h) \qquad \text{für alle } (v_h, q_h) \in X_h \times Q_h\,,$$

dann gilt $u_h \in V_h$ und u_h löst (5.3).

5 FE-Diskretisierungen der Stokes-Gleichungen

(5.5) 2. Lemma von Strang: Sei $a_h(v,w) = a(v,w)$ für $v,w \in V$ und sei $\|\cdot\|_h$ eine Norm auf $V + V_h$. Sei $u \in V$ mit $a(u,v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$, und sei $u_h \in V_h$ mit $a_h(u_h,v_h) = \ell_h(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$. Wenn $|a_h(v,w)| \le C_a \|v\|_h \|w\|_h$ für $v,w \in V + V_h$ und $a_h(v_h,v_h) \ge \alpha_0 \|v_h\|_h^2$ für $v_h \in V_h$ gilt, dann existiert $C > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_h \le C \inf_{v_h \in V_h} \Big(\|u - v_h\|_h + \sup_{\|w_h\|_h = 1} |a_h(u,w_h) - \ell_h(w_h)| \Big) .$$

(5.6) Das Sattelpunktproblem (5.4) hat eine eindeutige Lösung (u_h, p_h), wenn gilt:

$$\inf_{q_h \in Q_h,\ \|q_h\|_0 = 1} \ \sup_{v_h \in X_h,\ \|v_h\|_1 = 1} b(v_h, q_h) > 0 .$$

(5.7) (X_h, Q_h) heißt *inf-sup stabil*, wenn für alle $q_h \in Q_h$ gilt:

$$\sup_{v_h \in X_h,\ \|v_h\|_1 = 1} b(v_h, q_h) \ge \beta_0 \sup_{v \in X,\ \|v\|_1 = 1} b(v, q_h) .$$

(5.8) Das Fortin-Kriterium: Sei $F_h \colon X \longrightarrow X_h$ ein linearer Operator mit $\|F_h v\|_1 \le C \|v\|_1$ und $b(v, q_h) = b(F_h v, q_h)$ für alle $v \in X$ und alle $q_h \in Q_h$. Dann ist (X_h, Q_h) inf-sup stabil.

Sei $X_h = \big(H_0^1(\Omega) \cap S_h^1\big)^2 + \mathrm{span}\{b_K = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}^2) \colon K \in \mathscr{T}_h\}$ und $Q_h = \mathscr{S}_h^1 / \mathbb{R}$ (Mini-Element).

(5.9) Es gilt die inverse Abschätzung $\|v_h\|_1 \le C\, h^{-1} \|v_h\|_0$ für $v_h \in X_h$.

(5.10) Sei Ω konvex. Dann ist das Mini-Element (X_h, Q_h) inf-sup stabil.

5 FE-Diskretisierungen der Stokes-Gleichungen

(5.11) Zu $X = H^1_0(\Omega,\mathbb{R}^d)$, $Q = L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ und $V = \{v \in X\colon b(v,q) = 0 \text{ für alle } q \in Q\}$.
Definiere $E\colon Q \longrightarrow X$ mit $a(Eq,v) = b(v,q)$ für alle $v \in X$. Dann gilt

a) $E(Q)$ ist dicht in $V^\perp = \{v \in X\colon a(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in X\}$.

b) Wenn $\beta > 0$ existiert mit $\sup_{\|v\|_1=1} b(v,q) \geq \beta\|q\|_0$ für alle $q \in Q$, dann gilt $E(Q) = V^\perp$.

(5.12) Zu $q \in L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ mit $\int_\Omega q\,dx = 0$ existiert ein $v \in H^1_0(\Omega,\mathbb{R}^d)$ mit $\nabla\cdot v = q$, und es existiert ein $C > 0$ mit $\|v\|_1 \leq C\|q\|_0$.

(5.13) Es existiert ein $\beta > 0$ mit $\sup_{\|v\|_1=1} b(v,q) \geq \beta\|q\|_0$ für alle $q \in Q$.

(5.14) Zu $f \in L_2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ existiert $(u,p) \in X \times Q$ mit

$$
\begin{aligned}
a(u,v) + b(v,p) &= (f,v)_0, && v \in X\,,\\
b(u,q) &= 0, && q \in Q\,.
\end{aligned}
$$

(5.15) Sei $T_h\colon X \times Q \longrightarrow X_h \times Q_h$ der Lösungsoperator $(v_h,q_h) = T_h(v,q)$ mit

$$
\begin{aligned}
a(v_h,w_h) + b(w_h,q_h) &= a(v,w) + b(w,q), && w_h \in X_h\,,\\
b(v_h,r_h) &= b(v,r_h), && r_h \in Q_h\,.
\end{aligned}
$$

Wenn (X_h,Q_h) inf-sup stabil ist, dann ist $\|T_h\|_{L(X\times Q,X\times Q)} = \sup_{\|(v,q)\|_{X\times Q}=1} \|T_h(v,q)\|_{X\times Q} \leq C$.

(5.15) Wenn (X_h,Q_h) inf-sup stabil ist, dann gilt

$$
\|(u,p)-(u_h,p_h)\|_{X\times Q} \leq C \inf_{(v_h,q_h)\in X_h\times Q_h} \|(u,p)-(v_h,q_h)\|_{X\times Q}\,.
$$