1 Skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen

Betrachte die Transportgleichung $\partial_t u = a\partial_x u$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ mit $u(x,0) = u_0(x)$.
Sei $h > 0$, $\tau > 0$, $\Delta = h\mathbb{Z}$, $x_j = jh$, $t_n = n\tau$, und approximiere $(I_h u(t_n)) = (u(x_j,t_n))_j$ durch $(u_j^n)_j$.

(1.1) Sei $a > 0$, und sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung der Transportgleichung.
Sei $\gamma = a\tau/h \in (0,1)$. Dann gilt für das Upwind-Verfahren

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \gamma(u_{j+1}^n - u_j^n)\,, \qquad u^0 = I_h u_0$$

die Fehlerabschätzung

$$\|I_h u(t_n) - u^n\|_{\Delta,\infty} \le C\, t_n\, h \|\partial_x^2 u\|_\infty \qquad \text{mit } \|v\|_{\Delta,\infty} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |v(x_j)|\,.$$

(1.2) Ein allgemeines Differenzenschema $E_\tau u^n = (\sum_k a_k u_{j-k}^n)_j$ für festes Verhältnis τ/h heißt

a) konsistent, wenn $\|I_h u(t_{n+1}) - E_\tau I_h u(t_n)\|_{\Delta,\infty} = o(h)$;

b) konsistent von der Ordnung p, wenn $\|I_h u(t_{n+1}) - E_\tau I_h u(t_n)\|_{\Delta,\infty} \le C\,\tau\, h^p \|\partial_x^{p+1} u\|_\infty$;

c) stabil, wenn $\|E_\tau^n\|_{\Delta,\infty} \le C_T$ für alle $n \le T/\tau$.

(1.3) Sei E_τ konsistent von der Ordnung p, es gelte

$$\|E_\tau\|_{\Delta,\infty} \le 1 + \sigma h\,.$$

Dann ist E_τ stabil und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|I_h u(t_n) - u^n\|_{\Delta,\infty} \le \gamma C \exp(a\sigma T/\gamma)\, h^p\, \|\partial_x^{p+1} u\|_\infty\,.$$

1 Skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen

(1.4) $\hat{E}(\xi) = \sum_k a_k \exp(ßk\xi)$ heißt das *Symbol* zum Differenzenoperator $E_\tau u^n = (\sum_k a_k u^n_{j-k})_j$.

(1.5) Wenn $\|E_\tau\|_{\Delta,\infty} \le 1$ gilt, dann gilt auch $|\hat{E}(\xi)| \le 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

(1.6) Sei $\|v\|_h = \Big(h\sum_j |v_j|^2\Big)^{1/2}$. Es gilt genau dann $\|E_\tau\|_h \le 1$, wenn $|\hat{E}(\xi)| \le 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt.

(1.7) Sei $J \in C^1(\mathbb{R})$ und $u_0 \in C(\mathbb{R})$ gegeben.
Für $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gelte

$$\partial_t u + \partial_x J(u) = 0 \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0\,.$$

Dann heißt u *starke* Lösung.

(1.8) Für $u \in L_\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gelte

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^\infty u(x,t)\partial_t\phi(x,t) + J(u(x,t))\partial_x\phi(x,t)\big)\,dt + u_0(x,0)\phi(x,0)\Big)\,dx$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. Dann heißt u *schwache* Lösung.

(1.9) Sei $J \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\|J''\|_\infty,\ \|u_0\|_\infty \le M$.
Dann existiert $T > 0$, so dass eine starke Lösung (1.7) in $C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$ existiert.

(1.10) Sei $\mathbb{R} \times [0,\infty) = M_L \cup \Gamma \cup M_R$ eine disjunkte Zerlegung durch eine Kurve $\Gamma = \{(\gamma(t),t)\colon\ t \in [0,\infty)\}$. Sei $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, so dass $u_L = u|_{M_L} \in C^1(\bar{M}_L)$ und $u_R = u|_{M_R} \in C^1(\bar{M}_R)$ Lösungen von (1.7) sind. Dann ist u genau dann schwache Lösung, wenn gilt:

$$\big(u_L(x,t) - u_R(x,t)\big)\gamma'(t) = J(u_L(x,t)) - J(u_R(x,t)) \qquad \text{für } (x,t) = (\gamma(t),t) \in \Gamma\,.$$

1 Skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen

(1.11) Sei u eine schwache Lösung von (1.8), und sei u unstetig entlang der Kurve $\Gamma = \{(\gamma(t),t)\colon\ t \in [0,\infty)\}$. Dann erfüllt u eine *Entropie-Bedingung*, wenn für die Schockgeschwindigkeit $\gamma'(t)$ gilt:

$$J'(u_L(x,t)) > \gamma'(t) = \frac{J(u_L(x,t)) - J(u_R(x,t))}{u_L(x,t) - u_R(x,t)} > J'(u_R(x,t)) \qquad \text{für } (x,t) = (\gamma(t),t) \in \Gamma\,.$$

(1.12) Sei J strikt konvex (d.h. $a = J'$ streng monoton wachsend), sei $u_0(x) = \begin{cases} u_- & x < 0 \\ u_+ & x > 0 \end{cases}$ mit $u_-, u_+ \in \mathbb{R}$. Dann ist die Entropie-Lösung gegeben durch:

$$u_- > u_+\colon \qquad u(x,t) = \begin{cases} u_- & x < ct \\ u_+ & x > ct \end{cases} \qquad \text{mit } c = \frac{J(u_-) - J(u_+)}{u_- - u_+}$$

$$u_- < u_+\colon \qquad u(x,t) = \begin{cases} u_- & x < a(u_-)t \\ a^{-1}(x/t) & a(u_-)t \le x \le a(u_+)t \\ u_+ & x > a(u_+)t \end{cases}$$

(1.13) Sei $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein *numerischer Fluss* zu J. Er heißt konsistent, wenn $g(u,u) = J(u)$ gilt. Er definiert ein Differenzen-Verfahren in Erhaltungsform $u^{n+1} = E_\tau u^n$ mit

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\tau}{h}\Big(g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n\Big)\,, \qquad g_{j+1/2}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n)\,, \quad g_{j-1/2}^n = g(u_{j-1}^n, u_j^n)\,.$$

(1.14) τ/h erfüllt die CFL-Bedingung, falls $(\tau/h)\sup J'(u^n) \le 1$ gilt.

(1.15) Dann ist das Lax-Friedich-Verfahren mit $g(u,v) = \frac{1}{2}\big(J(u) - J(v)\big) + h/(2\tau)(u-v)$ stabil.

1 Skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen

(1.16) Sei $|u^n|_{\Delta,BV} = \sum_j |u^n_{j+1} - u^n_j|$ die diskrete Totalvariation.
Dann heißt E_τ ein TVD-Verfahren, wenn $|E_\tau u^n|_{\Delta,BV} \le |u^n|_{\Delta,BV}$ gilt.

(1.17) Das Lax-Friedrich-Verfahren ist ein TVD-Verfahren.

(1.18) Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine klassische Lösung (1.7), und der numerische Fluss $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sei konsistent mit beschränkten Ableitungen. Dann gilt für $\tau/h \le C$

$$I_h u(t_{n+1}) - E_\tau I_h u(t) = O(h^2 + \tau^2)\,.$$

(1.19) Im Folgenden sei $g \in C^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ und $u_m(x,t) = \sum u^n_j \chi_m(x,t)$ eine stückweise konstante Funktion zur diskreten Lösung (u^n_j) mit den Schrittweiten $(h_m, \tau_m) = 2^{-m}(h_0, \tau_0)$.
Sei $\|u_m\|_\infty \le K$. Wenn u_m fast überall punktweise gegen
$u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ konvergiert, dann ist u schwache Lösung von (1.8).

(1.20) Gelte zusätzlich $\|u_m\|_{\Delta_m,BV} \le K$. Dann konvergiert eine Teilfolge gegen eine schwache Lösung $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

(1.21) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u_h(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L_1} \le \|u_h(\cdot,0) - u(\cdot,0)\|_{L_1} + C\,t\,\|u_0\|_{BV}\sqrt{\tau}\,.$$

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

(2.1) Eine *Deformation* ist ein orientierungserhaltendes Vektorfeld

$$\varphi\colon \bar\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

für das die Einschränkung $\varphi|_\Omega$ injektiv ist. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$\bar\Omega$ Referenz-Konfiguration
$\boldsymbol{x} \in \bar\Omega$ Lagrange-Variable
$\bar\Omega^\varphi := \varphi(\bar\Omega)$ deformierte Konfiguration
$\boldsymbol{x}^\varphi := \varphi(\boldsymbol{x})$ Euler-Variable
$\boldsymbol{F} := D\varphi = (\partial_j \varphi_i)_{i,j=1,\dots,3}$ Deformationsgradient, wobei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$
$J := \det \boldsymbol{F} > 0$

(2.2) Sei $V \subset \Omega$ offen mit hinreichend glattem Rand ∂V, und sei $A \subset \partial V$. Dann gilt für $V^\varphi = \varphi(V)$

$$\int_{V^\varphi} d\boldsymbol{x}^\varphi = \int_V J\, d\boldsymbol{x}, \qquad \text{und} \int_{A^\varphi} d\boldsymbol{a}^\varphi = \int_A J|\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}|\, d\boldsymbol{a}$$

für $A^\varphi = \varphi(A)$, wobei $\boldsymbol{n}\colon \partial V \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die äußere Normale bezeichnet.

(2.3) Für die Kofaktor-Matrix $\operatorname{Cof}\boldsymbol{F} = J\boldsymbol{F}^{-T}$ gilt die Piola-Identität $\operatorname{div}\operatorname{Cof}\boldsymbol{F} = 0$.

(2.4) Sei $\boldsymbol{T}^\varphi\colon \bar\Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^{3,3}$ ein Tensorfeld, und sei

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) := J(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^{-T}$$

die *Piola-Transformation* von $\boldsymbol{T}^\varphi$. Dann gilt

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x})\operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi), \qquad \operatorname{div}^\varphi = \sum \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi}$$

und $\displaystyle\int_{\partial V} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{a} = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{T}\, d\boldsymbol{x} = \int_{V^\varphi} \operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi\, d\boldsymbol{x}^\varphi = \int_{\partial V^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi\cdot\boldsymbol{n}^\varphi\, d\boldsymbol{a}^\varphi.$

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

(2.5) Das symmetrische Tensorfeld $\boldsymbol{C}(x) := \boldsymbol{F}(x)^T\boldsymbol{F}(x)$ heißt (rechter) *Cauchy–Greenscher Verzerrungstensor*, $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$ heißt *Green-St.Venant-Verzerrungstensor*.

(2.6) Es gilt $\boldsymbol{C} \equiv \mathbf{I}$ in Ω genau dann, wenn $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{Q}\boldsymbol{x}$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{SO}(3) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3,3} \colon \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I},\ \det(\boldsymbol{R}) = 1\}$ eine Starrkörperbewegung ist.

(2.7) Cauchy-Axiom: Zu gegebenen Volumenkraftdichten und Oberflächenkraftdichten

$$\boldsymbol{f}^\varphi : \Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{g}^\varphi : \Gamma_1^\varphi \subset \partial\Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

existiert ein Vektorfeld

$$\boldsymbol{t}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit folgenden Eigenschaften: Für alle $V^\varphi \subset \Omega^\varphi$ gilt

a) $\boldsymbol{t}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi) = \boldsymbol{g}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)$

b) $\int_{V^\varphi} \boldsymbol{f}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)\, d\boldsymbol{x}^\varphi + \int_{\partial V^\varphi} \boldsymbol{t}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi)\, d\mathbf{a}^\varphi = 0$

c) $\int_{V^\varphi} \boldsymbol{x}^\varphi \times f(\boldsymbol{x}^\varphi)\, d\boldsymbol{x}^\varphi + \int_{\partial V^\varphi} \boldsymbol{x}^\varphi \times \mathbf{t}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\, d\boldsymbol{a}^\varphi = 0$

(2.8) Dann existiert ein Tensorfeld $T^\varphi : \Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^{3,3}$ (Cauchyscher Spannungstensor) mit

$$\boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)\boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)$$

und

1) $\boldsymbol{T}^\varphi \cdot \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi$ auf Γ_1^φ
2) $-\mathrm{div}^\varphi\, \boldsymbol{T}^\varphi = \boldsymbol{f}^\varphi$ in Ω^φ
3) $(\boldsymbol{T}^\varphi)^T = \boldsymbol{T}^\varphi$ in Ω^φ

(2.9) Die Piola-Transformation der Cauchy-Spannung $\boldsymbol{T}^\varphi$ definiert den

1. Piola–Kirchhoff-Spannungstensor $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) := J(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{x})\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{3,3}$.

Für $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)$ und $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}|\boldsymbol{g}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)$ gilt

$$\int_\Omega \boldsymbol{T} : D\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}$$

für alle $\boldsymbol{v}\colon \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ für $\boldsymbol{x} \in \Gamma_0 := \partial\Omega \setminus \Gamma_1$.

(2.10) Kraftdichten **f** und Oberflächenkraftdichten **g** heißen *konservativ*, wenn Potentiale

$$\mathscr{F}(\psi) = \int_\Omega \hat{f}\big(\boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{x}), D\psi(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{x}, \qquad \mathscr{G}(\psi) = \int_{\Gamma_1} \hat{g}\big(\boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{x}), D\psi(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{a}$$

existieren, so dass für die Gâteaux-Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} D\mathscr{F}(\psi)[\boldsymbol{v}] &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\mathscr{F}(\psi + h\boldsymbol{v}) - \mathscr{F}(\psi)\big) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} \\ D\mathscr{G}(\psi)[\boldsymbol{v}] &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

(2.11) Drucklasten $\boldsymbol{T}^\varphi \cdot \mathbf{n}^\varphi = -p\boldsymbol{n}^\varphi$ sind konservativ, und für $\mathscr{G}(\psi) = -\frac{p}{3}\int_{\partial\Omega} \operatorname{Cof} D\psi\boldsymbol{n}\cdot\psi\, d\boldsymbol{a}$ gilt $\mathscr{G}(\psi) = -p\int_\Omega \det D\psi\, d\boldsymbol{x}$ und $D\mathscr{G}(\psi)[\boldsymbol{v}] = -\frac{p}{3}\int_{\partial\Omega} \operatorname{Cof} D\psi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}$.

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Sei $\mathrm{Sym}(3) = \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon \mathbf{S}^T = \mathbf{S}\}$ and $\mathbb{R}^{3\times 3}_+ = \{\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon \det \boldsymbol{F} > 0\}$.

(2.12) Ein Material heißt *elastisch*, wenn eine Antwortfunktion

$$\hat{\boldsymbol{T}}^D \colon \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3\times 3}_+ \longrightarrow \mathrm{Sym}(3)$$

existiert mit

$$\boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi) = \hat{\boldsymbol{T}}^D\big(\boldsymbol{x}, D\varphi(\boldsymbol{x})\big)\,.$$

Wir fordern, dass die Antwortfunktion koordinatenunabhängig (objektiv) ist, d.h.

$$\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^T, \qquad \boldsymbol{Q} \in \mathrm{SO}(3)\,.$$

(2.13) Ein elastische Material heißt *homogen*, wenn $\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}) = \hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{F})$ gilt.
Es heißt *isotrop*, wenn $\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}) = \hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F})$ für alle $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{SO}(3)$ gilt.

(2.14) Die Spannungsantwort ist dann und nur dann isotrop, wenn gilt

$$\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}) = \bar{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T) = \beta_0(\iota_{\mathbf{B}})\boldsymbol{I} + \beta_1(\iota_{\mathbf{B}})\boldsymbol{B} + \beta_2(\iota_{\mathbf{B}})\boldsymbol{B}^2\,, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\,,$$

wobei $\beta_j \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ nur von $\iota_{\mathbf{B}} = \big(\mathrm{trace}\,\boldsymbol{B}, \frac{1}{2}\big((\mathrm{trace}\,\boldsymbol{B})^2 - \mathrm{trace}\,\boldsymbol{B}^2, \det \boldsymbol{B}\big)$ abhängt.

(2.14) In der Nähe der Ruhelage gilt für den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\Sigma = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}$

$$\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{C}) = \lambda(\boldsymbol{x})\,\mathrm{trace}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E} + o(\boldsymbol{E})\,.$$

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Karlsruhe Institute of Technology

(2.15) Ein Material heißt *hyperelastisch*, wenn ein Energiefunktional $\hat{W}\colon \hat{\Omega}\times\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ existiert, so dass die Spannungsantwort von der Form $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}) = D_{\boldsymbol{F}}\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}) \in \mathbb{R}^{3,3}$ ist:

$$\big(D_{\boldsymbol{F}}\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{F})\big) : \boldsymbol{H} = D_{\boldsymbol{F}}\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{F})[\boldsymbol{H}] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}+h\boldsymbol{H}) - \hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{F})\big), \quad \boldsymbol{H}\in\mathbb{R}^{3,3}.$$

Für objektive Materialien ist $\hat{W}(\boldsymbol{QF}) = \hat{W}(\boldsymbol{F})$ für $\boldsymbol{Q}\in \mathrm{SO}(3)$ und $\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \tilde{W}(\boldsymbol{C}) = \breve{W}(\boldsymbol{E})$ wohldefiniert. Dann gilt $\boldsymbol{T} = D_{\boldsymbol{F}}\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}\,D_{\boldsymbol{E}}\breve{W}(\boldsymbol{E})$.
Ein hyperelastisches Material ist isotrop, wenn $\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \hat{W}(\boldsymbol{FQ})$ für $\boldsymbol{Q}\in\mathrm{SO}(3)$.
In der Nähe der Ruhelage gilt $\breve{W}(\boldsymbol{E}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{trace}\boldsymbol{E})^2 + \mu\operatorname{trace}\boldsymbol{E}^2 + o(|\boldsymbol{E}|^2)$.
St. Venant-Kirchhoff Energie: $\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{trace}\boldsymbol{E})^2 + \mu\operatorname{trace}\boldsymbol{E}^2$
Neo-Hooke Energie: $\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \frac{\mu}{2}\boldsymbol{F} : \boldsymbol{F} + \Gamma(J)$, mit z.B. $\Gamma(J) = \frac{\lambda}{4}J^2 - \big(\frac{\lambda}{2}+\mu\big)\log J - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{2}\mu$.

(2.15) Sei $W(\varphi) = \int_\Omega \hat{W}\big(\boldsymbol{x}, D\varphi(\boldsymbol{x})\big)\,d\boldsymbol{x}$ die freie Energie und sei $\mathscr{E}(\varphi) = W(\varphi) - \mathscr{F}(\varphi) - \mathscr{G}(\varphi)$ die totale Energie, und sei $\boldsymbol{V}(\varphi_0) = \{\varphi\colon \bar{\Omega}\to\mathbb{R}^3\colon\ \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_0(\boldsymbol{x}) \text{ on } \Gamma_0\}$.
Dann gilt für jeden hinreichend glatten Minimierer $\varphi\in\boldsymbol{V}(\varphi_0)$ von $\mathscr{E}(\cdot)$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{T}\big(D\varphi(\boldsymbol{x})\big) : D\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \quad &= \quad \int_\Omega \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}),D\varphi(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\\ &\qquad + \int_{\Gamma_1}\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}),D\varphi(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

für alle $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}(\boldsymbol{0})$, wobei $\boldsymbol{T} = D_{\boldsymbol{F}}\hat{W}(D\varphi)$.

3 Festkörpermodelle mit Nebenbedingungen

(3.1) Sei $\mathscr{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\, dx - \int_\Omega fu\, dx$.
Dann ist $\mathscr{E}(\cdot)$ in $H^1_0(\Omega)$ nach unten beschränkt und koerziv, d.h. $\mathscr{E}(v) \to \infty$ für $\|v\|_1 \to \infty$.

(3.2) Seien $V_h = \mathrm{span}\{\phi_z : z \in \mathscr{N}_h\}$ lineare Lagrage-Elemente mit Knotenpunkten $\mathscr{N}_h \subset \bar\Omega$, sei $\chi \in C(\bar\Omega)$ ein Hindernis, und sei $K_h = \{v_h \in V_h : v_h(z) \geq \chi(z),\ z \in \mathscr{N}_h\}$ die zulässige Menge.

a) Dann existiert genau ein $u_h \in K_h$ mit $\mathscr{E}(u_h) \leq \mathscr{E}(v_h)$ für alle $v_h \in K_h$.

b) $u_h \in V_h$ ist eindeutig durch $\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla(v_h - u_h)\, dx \geq \int_\Omega f(v_h - u_h)\, dx$ für alle $v_h \in K_h$ charakterisiert.

(3.3) Sei $K = \{v \in H^1_0(\Omega) : v \geq \chi$ fast überall in $\Omega\}$ die zulässige Menge.

a) Dann existiert genau ein $u \in K$ mit $\mathscr{E}(u) \leq \mathscr{E}(v)$ für alle $v \in K$.

b) $u \in V$ ist eindeutig durch $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u)\, dx \geq \int_\Omega f(v - u)\, dx$ für alle $v \in K$ charakterisiert.

(3.4) Sei $u \in K$ Lösung von (3.3), $u_h \in K_h$ Lösung von (3.2), und es gelte $\Delta u \in L_2(\Omega)$. Dann gilt

$$\|\nabla(u - u_h)\|_0 \leq \inf_{v_h \in K_h} \inf_{v \in K} \Big(\|\nabla(u - v_h)\|_0^2 + 2\,\|f + \Delta u\|_0 \big(\|u - v_h\|_0 + \|u_h - v\|_0\big)\Big)^{1/2}.$$

3 Festkörpermodelle mit Nebenbedingungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$ mit $|\Gamma_D|_{d-1} > 0$. Sei $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,dx - \ell(\boldsymbol{u})$ mit $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \mathrm{sym}(D\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu_S\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_S\,\mathrm{trace}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}$ und $\ell(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx + \int_{\Gamma_N}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,da$.

(3.5) Kornsche Ungleichung: Es existiert $C > 0$ mit $\|D\boldsymbol{v}\|_0 \le C\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_0$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ mit $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^d)\colon \boldsymbol{v}_{|\Gamma_D} = \boldsymbol{0}\}$. Dann ist $\mathscr{E}(\cdot)$ in $\boldsymbol{V}$ nach unten beschränkt und koerziv.

(3.6) Sei $\chi\colon \Gamma_C \longrightarrow [0,\infty)$ eine Abstandsfunktion und $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\colon \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \le \chi$ fast überall in $\Gamma_C\}$.

a) Es existiert genau ein $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ mit $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) \le \mathscr{E}(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$.

b) Es gilt $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,dx \ge \ell(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$.

c) Es existiert $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma_C)$ mit $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,dx + \langle\lambda,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\rangle = \ell(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ und $\langle\lambda,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\rangle \ge 0$ für alle $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma_C} \ge 0$ und $\langle\lambda,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}-\chi\rangle = 0$.

(3.7) Sei $\boldsymbol{K}_h = \{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h\colon \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}(z) \le \chi(z)$ für $z \in \mathscr{N}_h \cap \Gamma_C\}$.

a) Es existiert genau ein $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}_h$ mit $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}_h) \le \mathscr{E}(\boldsymbol{v}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h$.

b) Es gilt $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h)\,dx \ge \ell(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h$.

c) Es existiert $\lambda_h\colon \mathscr{N}_h \cap \Gamma_C \longrightarrow [0,\infty)$ mit $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h)\,dx + \langle\lambda_h,\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n}\rangle_h = \ell(\boldsymbol{v}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$ und $\langle\lambda_h,\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{n}-\chi\rangle_h = 0$. Dabei ist $\langle\lambda_h,w_h\rangle_h = \sum_{z\in\mathscr{N}_h\cap\Gamma_C}\omega_h\lambda_h(z)w_h(z)$.

(3.8) Wähle $\lambda_h^0 \ge 0$ und $\alpha > 0$. Berechne $(\boldsymbol{u}_h^k,\lambda_h^k)$ mit $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h^k) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h)\,dx + \langle\lambda_h^k,\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n}\rangle_h = \ell(\boldsymbol{v}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$ und $\lambda_h^k = \max\{0,\lambda_h^{k-1} + \alpha(\boldsymbol{u}_h^k\cdot\boldsymbol{n}-\chi)\}$ für $k = 1,2,3,\ldots$ Dann gilt

$$\alpha\sum_{k=1}^\infty \mathscr{E}(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h^k) \le \|\lambda_h - \lambda_h^0\|_h^2.$$

3 Festkörpermodelle mit Nebenbedingungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ mit $|\Gamma_D|_{d-1} > 0$. Sei $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,dx - \ell(\boldsymbol{u})$ mit $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \mathrm{sym}(D\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu_S\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_S \mathrm{trace}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}$ und $\ell(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,da$.

(3.9) Definiere $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^d)\colon \boldsymbol{v}_{|\Gamma_D} = \boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{S} = L_2(\Omega, \mathrm{Sym}(d))$ und $\mathscr{D}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{C}^{-1} : \boldsymbol{\tau}\,dx$.
Für $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{S}$ ist äquivalent:

a) $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) \le \mathscr{E}(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$;
b) $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_0 = \ell(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$;
c) $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{S}$ ist Sattelpunkt von $\mathscr{L}_{\mathrm{el}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) = \mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}) + \ell(\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))_0$.
Dann ist $\mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}) \le \mathscr{D}(\boldsymbol{\tau})$ für alle $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{S}(\ell) = \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{S}\colon (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_0 = \ell(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}$.

(3.10) Sei $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{\tau} \in S\colon |\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}| \le K_0\}$ mit $\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{d}\mathrm{trace}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{I}$ und $K_0 > 0$.
Seien $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{V}$ lineare Lagrange-Elemente und $\boldsymbol{S}_h \subset \boldsymbol{S}$ stückweise konstant.
Definiere $\boldsymbol{K}_h(\ell) = \boldsymbol{K}_h \cap \boldsymbol{S}(\ell)$.

(3.11) $\boldsymbol{\sigma}_h \in \boldsymbol{K}_h$ löst das Hencky-Problem, falls $\mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}_h) \le \mathscr{D}(\boldsymbol{\tau}_h)$ für alle $\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{K}_h$.

(3.11) Sei $\Gamma_h \subset \{\gamma \in L_2(\Omega)\colon \gamma \ge 0\}$ stückweise konstant.
$(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{u}_h,\gamma_h) \in \boldsymbol{V}_h\times\boldsymbol{S}_h\times\Gamma_h$ sei ein KKT-Punkt, d.h.

a) $\boldsymbol{\sigma}_h = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) - \gamma_h \frac{\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_h}{|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_h|}$;
b) $(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h))_0 = \ell(\boldsymbol{v}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$;
c) $\gamma_h \ge 0$, $|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_h| - K_0 \le 0$, $\gamma_h(|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_h| - K_0) = 0$.

Dann ist $(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{u}_h,\gamma_h)$ Sattelpunkt des Lagrange-Funktionals

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{u}_h,\gamma_h) = \mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}_h) + \ell(\boldsymbol{u}_h) - (\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h))_0 + \int_\Omega \gamma_h(|\mathrm{dev}(\boldsymbol{\sigma}_h)| - K_0)\,dx$$

und $\boldsymbol{\sigma}_h$ löst das Hencky-Problem.

3 Festkörpermodelle mit Nebenbedingungen

Sei $d(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{C}^{-1} : \boldsymbol{\tau}\, dx$, und sei $P_{\boldsymbol{K}} : \boldsymbol{S} \longrightarrow \boldsymbol{K}$ die Orthogonalprojektion auf $\boldsymbol{K}$ bezüglich des Skalarprodukts $d(\cdot,\cdot)$, d.h. $d(\boldsymbol{\tau} - P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta} - P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\tau}) \le 0$ für alle $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{K}$.

(3.12) $\boldsymbol{\sigma} = P_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))$ ist äquivalent zu

a) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \gamma \frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}|}$;

b) $\gamma \ge 0$, $|\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}| - K_0 \le 0$, $\gamma(|\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}| - K_0) = 0$.

Sei $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$. Es gilt $\gamma = 2\mu \max\{0, |\operatorname{dev}(\boldsymbol{\theta})| - K_0\}$ und $\boldsymbol{P_K}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \gamma \frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}|}$.

(3.13) Sei $J(\boldsymbol{u}) = \mathscr{E}(\boldsymbol{u}) - \mathscr{D}(P_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))$. Dann ist $J(\cdot)$ konvex und differenzierbar, und es gilt $DJ(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}] = (P_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_0 - \ell(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.

(3.14) Es existiere ein $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \boldsymbol{S}_h(\ell)$ mit $|\operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h)| - K_0 \le \delta_h < 0$. Dann gilt für $\boldsymbol{\eta}_h \in S_h$ mit $\|\boldsymbol{\eta}_h\|_\infty \le \delta_h$

$$(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\eta}_h)_0 \le J(\boldsymbol{u}) + C\,.$$

Also ist $J(\cdot)$ koerziv in $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Verallgemeinertes Newton-Verfahren:
S0) Wähle $\boldsymbol{u}_h^0 \in \boldsymbol{V}_h$. Setze $k = 0$.
S1) Berechne $\boldsymbol{\theta}_h^k = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^k)$ und $r^k(\boldsymbol{v}_h) = (P_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{\theta}_h^k), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h))_0 - \ell(\boldsymbol{v}_h)$. Falls $\|r^k\|$ klein: STOP
S2) Berechne $\boldsymbol{w}_h^k \in \boldsymbol{V}_h$ mit $(\boldsymbol{C}^k : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h^k), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h))_0 = -r^k(\boldsymbol{v}_h)$ mit $\gamma_h^k = \max\{0, |\operatorname{dev}(\boldsymbol{\theta}_h^k)| - K_0\}$
und $\boldsymbol{C}^k : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\gamma_h^k}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k|}\left(\operatorname{dev}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k|}\boldsymbol{\varepsilon} : \operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k\right) - \frac{\operatorname{sgn}(\gamma_h^k)}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k|}\frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k|}\boldsymbol{\varepsilon} : \operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k$.
Setze $\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + t_k \boldsymbol{w}^k$ mit Schrittweite $t_k \in (0,1]$; setze $k := k+1$ und gehe zu S1).

4 Multilevel-Verfahren: Eine Zweilevel-Methode

Seien $V_H \subset V_h \subset V \subset H$ Finite-Elemente-Räume, $a\colon V_h \times V_h \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, V-elliptische und beschränkte Bilinearform, $|||v||| = \sqrt{a(v,v)}$ und $\|\cdot\|_0$ Norm in H.
Sei $A_h\colon V_h \longrightarrow V_h'$ definiert durch $\langle A_h v_h, w_h\rangle = a(v_h, w_h)$.
Sei $R_h\colon V_h' \longrightarrow V_h$ definiert durch $(R_h A_h v_h, w_h)_0 = \theta_h a(v_h, w_h)$.
Sei $E_h\colon V_H \longrightarrow V_h$ definiert durch $(E_h v_H, w_h)_0 = (v_h, w_h)_0$ die Prolongation.
Sei $P_h\colon V_h \longrightarrow V_H$ definiert durch $a(P_H v_h, w_H) = a(v_h, w_H)_0$ die Galerkin-Projektion.
Sei $Q_h\colon V_h \longrightarrow V_H$ definiert durch $(Q_H v_h, w_H)_0 = (v_h, w_H)_0$ die L_2-Projektion.
Sei $f_h \in V_h'$ und $u_h^0 \in V_h$. Für $k = 1, 2, \dots$ berechne

$$u_h^{k-1/2} = u_u^{k-1} + R_h(f_h - A_h u_h^{k-1})$$

und $c_H^k \in V_H$ mit

$$a(c_H^k, v_H) = \langle f_h, v_H\rangle - a(u_h^{k-1/2}, v_H) \qquad \text{für alle } v_H \in V_H$$

und setze $u_h^k = u_h^{k-1/2} + E_H c_H^k$
Dann gilt für die Fehlerfortpflanzung des Zweigitter-Verfahrens (mit $u_h = A_h^{-1} f_h$)

$$e_h^k = u_h^k - u_h = (\mathrm{id} - E_h P_H)\,(\mathrm{id} - R_h A_h) e_h^{k-1}$$

(4.1) Sei

1) $|||v_h|||^2 \le \theta_h^{-1} \|v_h\|_0^2$
2) $\|v_h - E_h Q_H v_h\|_0^2 \le C\theta_h\, |||v_h|||^2$

Dann gilt $|||(\mathrm{id} - E_h P_H)(\mathrm{id} - R_h A_h)||| \le \sqrt{1 - \dfrac{1}{C}}$.

4 Multilevel-Verfahren: W-Zyklus-Konvergenz

Seien $V_j \subset V \subset H = L_2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ Finite-Elemente-Räume der Gitterweite $h_j = 2^{-j} h_0$.
Sei $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, V-elliptische und beschränkte Bilinearform.
Sei $\|\cdot\|_0$ Norm in H. Wir setzten volle Regularität voraus: Für $f \in H$, $u \in V$ mit
$a(u,v) = (f,v)_0$ und $u_j \in V_j$ mit $(a(u_j,v_j) = (f,v_j)_0$ gelte $\|u - u_j\|_0 \leq C\, h_j^2\, \|f\|_0$.

Sei $A_j\colon V_j \longrightarrow V_j$ definiert durch $(A_j v_j, w_j)_0 = a(v_j, w_j)$.
Aus der Inversen Ungleichung folgt $\|A_j\|_0 \leq C h_j^{-2}$.

Sei $R_j = \theta_j \,\mathrm{id}$ mit $\theta_j \|A_j\|_0 \leq 1$ und $\theta_j \geq c h_j^2$.
Sei $E_j\colon H \longrightarrow V_j$ definiert durch $(E_j v, w_j)_0 = (v, w_j)_0$ die Prolongation / L_2-Projektion.
Sei $P_j\colon V \longrightarrow V_j$ definiert durch $a(P_j v, w_j) = a(v, w_j)_0$ die Galerkin-Projektion.

(4.2) Dann gilt die

a) Approximationseigenschaft $\|u_j - E_j P_{j-1} u_j\|_0 \leq C_1 h_j^2 \, \|A_j u_j\|_0$;

b) Glättungseigenschaft $\|A_j(\mathrm{id} - R_j A_j)^m\|_0 \leq \frac{C_2}{m} h_j^{-2}$.

Definiere den W-Zyklus-Vorkonditionierer B_j rekursiv: $B_0 = A_0^{-1}$ und $c_j = B_j r_j$ durch $c_j^0 = 0$,

(S1) Glättung $c_j^k = R_j(r_j - A_j c_j^{k-1})$ für $k = 1, \ldots, m$

(S2) Grobgitterkorrektur $c_j^{m+l} = E_j B_{j-1} E_j^T (r_j - A_j c_j^{m+l-1})$ für $l = 1, 2$

und $c_j = c_j^{m+2}$. Sei $\rho_j = \|(\mathrm{id} - E_j B_j E_j^T A_j)^2 (\mathrm{id} - R_j A_j)^m\|_0$ die Norm der Fehlerfortpfanzung.

(4.3) Wenn m groß genug ist, dann ist $\rho_J < 1$ unanhängig von J.

4 Multilevel-Verfahren: Unterraum-Korrektur-Verfahren

Sein V ein Finite-Elemente-Raum, $a\colon V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ eine symmetrische, V-elliptische und beschränkte Bilinearform, $|||v|||=\sqrt{a(v,v)}$. Seien $V_j\subset V$ Unterräume für $j=0,\ldots,J$.
Sei $A\colon V\longrightarrow V'$ definiert durch $\langle Av,w\rangle=a(v,w)$. Sei $E_j\colon V_j\longrightarrow V$ die Einbettung.
Sei $A_j=E_j'AE_j\colon V_j\longrightarrow V_j'$ definiert durch $\langle A_jv_j,w_j\rangle=a(E_jv_j,E_jw_j)$. Setze $P_j=A_j^{-1}E_j'A$.

Parallele / additive Unterraum-Korrektur $c=B_ar$:

A1) Berechne $c_j=A_j^{-1}E_j'r$ für alle $j=0$.

A2) Berechne $c=\sum_{j=0}^J E_jc_j$.

Es gilt $B_a=\sum_{j=0}^J E_jP_j$.

Sukzessive / multiplikative Unterraum-Korrektur $c=B_mr$:

M0) Setze $c^{-1}=0$.

M1) Berechne $c^k=c^{k-1}+E_jA_j^{-1}E_j'(r-Ac^{k-1})$ für $k=0,1,\ldots,J$.

M2) Setze $c=c^J$.

Es gilt $\mathrm{id}-B_mA=\prod_{j=0}^J(\mathrm{id}-E_jP_j)$.

(4.4) Voraussetzungen:

a) Stabile Zerlegung: Es existiert ein $C_0>0$, so dass für jedes $v\in V$ eine Zerlegung $v=\sum_{j=0}^J E_jv_j$ mit $v_j\in V_j$ und $\sum_{j=1}^J |||E_jv_j|||^2\le C_0\,|||v|||^2$ existiert.

b) Verschärfte Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Für $v_j\in V_j$ und $v_k\in V_k$ gelte $a(E_jv_j,E_kv_k)\le\varepsilon_{jk}\,|||E_jv_j|||\,|||v_k|||$ $(j,k=1,\ldots,J)$. Setze $\mathscr{E}=(\varepsilon_{jk})$.

Dann gilt $\kappa(B_aA)\le C_0(1+\rho(\mathscr{E}))$ und $\rho(B_mA)\le\sqrt{1-1/((1+2\rho(\mathscr{E})^2)C_0)}$.

4 Multilevel-Verfahren: Unterraum-Korrektur-Verfahren

Überlappendes Schwarz-Verfahren

Sei $V \subset H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ein Finite-Elemente-Raum und $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^J \bar{\omega}_j$ eine überlappende Zerlegung von Ω. Sei $1 = \sum_{j=1}^J \theta_j$ eine zugehörige Zerlegung der 1, d.h. $0 \le \theta_j(x) \le 1$ und $\operatorname{supp} \theta_j \subset \bar{\omega}_j$.
Sei $\max_j \{k \colon \omega_j \cap \omega_k \neq \emptyset\} \le C_1$.
Sei $V_0 \subset V$ ein Grobgitterraum der Gitterweite H, und sei $V_j = \{v \in V \colon \operatorname{supp}(v) \subset \bar{\omega}_j\}$.

(4.5) Sei $\|\nabla \theta_j\|_\infty \le 1/\delta$. Dann gilt $C_0 \le CH/\delta$ und $\rho(\mathscr{E}) \le C_1$, d.h. die Konvergenzrate des überlappenden Schwarz-Verfahren ist abhängig von H/δ.

V-Zyklus mit Gauss-Seidel-Glätter

Seien $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_J = V$ geschachtelte Finite-Elemente-Räume der Schrittweite $H_j = 2^{-j} h_0$. Sei $V_j = \operatorname{span}\{\phi_{j,z} \colon z \in \mathscr{N}_j\}$. Definiere $V_{j,z} = \operatorname{span}\{\phi_{j,z}\}$.
Der Mehrgitter-V-Zyklus mit Gauss-Seidel-Glätter entspricht dem multiplikativen Unterraum-Verfahren zur Zerlegung $V = V_0 + \sum_{j=1}^J \sum_{z \in \mathscr{N}_j} V_{j,z}$.

(4.6) Es gilt C_0 und $\rho(\mathscr{E})$ sind unabhängig von h_J und von J beschränkt, d.h. die Konvergenzrate des Mehrgitter-V-Zyklus mit Gauss-Seidel-Glätter ist unabhängig von der Anzahl der Level und der Gitterweite.