1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeit

(1.1) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $G \subset \mathbb{R}^M$ Gebiet.
Zu einem Anfangswert $u_0 \in G$ und $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ suchen wir eine Lösung $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f\big(t, u(t)\big) \qquad t \in (t_0, t_0 + T) \\ u(t_0) &= u_0 \,. \end{aligned}$$

(1.2) Für $u \in C([t_0, t_0 + T], G)$ ist äquivalent:

a) $u \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ und u löst AWA (1.1)

b) u löst die Integralgleichung $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\, ds$ für $t \in [t_0, t_0 + T]$

(1.3) Sei $f \in C^k([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$, und sei $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ Lösung der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = f\big(t, u(t)\big)$ für $t \in (t_0, t_0 + T)$.
Dann gilt $u \in C^{k+1}([t_0, t_0 + T], G)$, und $u^{(j)} = (\frac{d}{dt})^j u$ erfüllt eine linere Differentialgleichung

$$\dot{u}^{(j)}(t) = b_j(t) + A_j(t) u^{(j)}(t) \qquad \text{für } j = 1, ..., k$$

mit $b_j \in C^{k-j}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ und $A_j \in C^{k-j}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^{M \times M})$ abhängig von $u, \dot{u}, ..., u^{(j-1)}$.

Für $j = 1$ gilt $b_1(t) = D_1 f(t, u(t))$ und $A_1(t) = D_2 f(t, u(t))$.

1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeit

(1.4) Zu $r > 0$ mit $B_r(u_0) := \{z \in \mathbb{R}^M \colon |z - u_0| \le r\} \subset G$ setze

$$M_r := \max_{(t,z)\in[t_0,t_0+T]\times B_r(u_0)} |f(t,z)|\,.$$

Dann gilt für jede Lösung u von (1.1)

$$|u(t) - u_0| \le (t - t_0)M_r\,, \qquad t \in [t_0, t_0 + \min\{T, \frac{r}{M_r}\}]\,.$$

Im Folgenden sei $T \le \frac{r}{M_r}$.

(1.5) Zu $N \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 + n\tau$, $\tau = \frac{T}{N}$ ist der *Eulersche Polygonzug* $u_N \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit

$$u_N(t) = u_N(t_{n-1}) + (t - t_{n-1})f\big(t_{n-1}, u_N(t_{n-1})\big), \qquad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, \dots, N$$

$v \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ ist Lipschitz-stetig, wenn $L > 0$ existiert mit

$$|v(s) - v(t)| \le L|s - t|\,, \qquad s, t \in [t_0, t_0 + T]\,.$$

Die L-stetigen Funktionen bilden einen Banachraum $C^{0,1}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit Norm $\|v\|_{0,1,\infty} = \max\Big\{\|v\|_\infty, \sup_{t_0\le s<t\le t_0+T} \frac{|v(s) - v(t)|}{|s - t|}\Big\}$.

(1.6) Der Eulersche Polygonzug ist wohldefiniert in G, es gilt $|u_N(t) - u_0| \le (t - t_0)M_r$ und

$$\|u_N\|_{0,1,\infty} \le \max\{|u_0| + r, M_r\}\,.$$

1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeit

(1.7) Jede beschränkte Folge $\{v_N\colon N \in \mathbb{N}\}$ in $C^{0,1}([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^M)$ besitzt eine konvergente Teilfolge $\{v^{N_k}\colon k \in \mathbb{N}\}$ in $C([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^M)$, d. h. es existiert $v \in C([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^M)$ mit

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|v_{N_k} - v\|_\infty = 0\,.$$

(1.8) Die Folge $\{u_N\colon N \in \mathbb{N}\}$ aus (1.4) ist in $C^{0,1}([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^M)$ beschränkt. Sie besitzt eine konvergente Teilfolge, die gegen eine Lösung $u \in C^1([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^M)$ von (1.1) konvergiert.

(1.9) $f \in C([t_0, t_0+T] \times G, \mathbb{R}^M)$ ist in der zweiten Komponente Lipschitz-stetig in G (erfüllt eine L-Bedingung), wenn $L > 0$ existiert mit

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le L\,|y - z|\,, \qquad t \in [t_0, t_0+T], \quad y, z \in G.$$

(1.10) Sei $f \in C^1([t_0, t_0+T] \times \overline{G}, \mathbb{R}^M)$, $G \subset \mathbb{R}^M$ beschränkt und konvex. Dann erfüllt f eine L-Bedingung in G.

(1.11) Seien $u, v \in C^1([t_0, t_0+T], G)$ Lösungen von $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ und $\dot{v}(t) = f(t, v(t))$. Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann gilt

$$|u(t) - v(t)| \le \exp(L(t - t_0))\,|u(t_0) - v(t_0)|\,, \qquad t \in [t_0, t_0+T].$$

(1.12) Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann existiert ein $T > 0$, so dass (1.1) eindeutig lösbar ist.

(1.13) Seien $w, a, b\colon [t_0, t_0+T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ stückweise stetig, $0 \le b(s) \le b(t)$ für $s < t$, und es gelte

$$d(t) \le \int_{t_0}^t a(s) d(s)\, ds + b(t), \qquad t \in [t_0, t_0+T].$$

Dann gilt $d(t) \le b(t)\ \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\Big)$ für $t \in [t_0, t_0+T]$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.1) Zur Funktion $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ definieren wir den Fluss

$$\phi \colon \mathscr{D} \subset [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

durch $\phi(t, \tau, z) = v(t + \tau)$, wobei $v \in C^1([t, t + \tau], G)$ Lösung einer AWA ist:

$$\begin{aligned} \dot{v}(s) &= f(s, v(s)) \qquad s \in [t, t + \tau] \\ v(t) &= z \end{aligned}$$

(2.2) Ein Einschrittverfahren wird durch eine Verfahrensfunktion

$$\psi \colon [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

definiert: Zu Schrittweiten $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ und $u_0 \in G$ setze

$$u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1}).$$

Wir setzen $|\tau| = \max_n \tau_n$. Der *diskrete Fluss* ist

$$\phi_\tau(t; \tau, z) = z + \tau \psi(t, \tau, z).$$

(2.3) *Globaler Fehler:* $e^n = u(t_n) - u^n$

Lokaler Diskretisierungsfehler: $g^n = \dfrac{1}{\tau_n}\big(u(t_n) - u(t^{n-1})\big) - \psi\big(t_{n-1}, \tau_n, u(t_{n-1})\big)$

Es gilt $g^n = g(t_{n-1}, \tau_n, u(t_{n-1}))$ mit

$$g(t, \tau, z) = \frac{1}{\tau}\big(\phi(t, \tau, z) - z\big) - \psi(t, \tau, z) = \frac{1}{\tau}\big(\phi(t, \tau, z) - \phi_\tau(t, \tau, z)\big).$$

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.3) Ein Einschrittverfahren heißt *konsistent*, wenn $\lim_{\tau\to 0} g(t,\tau,z) \longrightarrow 0$ gilt.
Es heißt *konsistent von der Ordnung p*, wenn $|g(t,\tau,z)| = O(\tau^p)$ gilt.
Es heißt *konvergent*, wenn $\lim_{\tau\to 0} \max_n e^n = 0$ gilt.
Es heißt *konvergent von der Ordnung p*, wenn $\max_n e^n = O(|\tau|^p)$ gilt.

(2.4) Wenn $\Lambda > 0$ existiert, so dass für die Verfahrensfunktion gilt

$$|\psi(t,\tau,z) - \psi(t,\tau,y)| \le \Lambda |z-y| \qquad t\in[t_0,t_0+T], \quad \tau \le \tau_0, \quad z,y\in G\,,$$

dann gilt

$$|u(t_n) - u^n| \le |u(t_0) - u^0| \exp\big(\Lambda(t_n - t_0)\big) + \max_{j=1,\dots,n} |g^j| \; \frac{\exp\big(\Lambda(t_n-t_0)\big) - 1}{\Lambda} \;.$$

(2.6) Verfahren von der Konsistenzordnung p sind konvergent von der Ordnung p.

(2.7) Seien $\delta_n > 0$, $\mu_n, z_n \ge 0$ für $n = 0,\dots,N$ gegeben mit $z_n \le (1+\delta_n) z_{n-1} + \mu_n$ für $n = 1,\dots,N$.
Dann gilt $z_n \le z_0 \exp \Delta_n + \max_{j=1,\dots,n} \dfrac{\mu_j}{\delta_j}\big(\exp(\Delta_n) - 1\big)$ mit $\Delta_n = \sum_{j=1}^n \delta_j$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.8) Ein allgemeines Runge-Kutta-Verfahren mit S Stufen wird durch

Stützstellen	$c \in \mathbb{R}^S$	$(c_1 = 0$ für explizite Verfahren$)$
Gewichte	$b \in \mathbb{R}^S$	$\big(\sum_{s=1}^{S} b_s = 1\big)$
Koeffizienten	$\mathscr{A} \in \mathbb{R}^{S,S}$	$(a_{sr} = 0$ für $s \le r$ für explizite Verfahren$)$

definiert:

$$\psi(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} b_s k_s \quad \text{mit} \quad k_s = f\Big(t + c_s\tau,\ z + \tau \sum_{r=1}^{s-1} a_{sr} k_r\Big)\,.$$

(2.9)

a) Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent, wenn $\sum_{s=1}^{S} b_s = 1$ gilt.

b) Wenn ein explizites Runge-Kutta-Verfahren die Konsistenzordnung p hat, dann gilt $p \le S$.

(2.10) Wenn für ein konsistentes Runge-Kutta-Verfahren $c_s = \sum_{r=1}^{S} a_{sr}$, $s = 1, \dots, S$ gilt, dann ist es invariant gegen Autonomisierung: Das Runge-Kutta-Verfahren für $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ in $\mathbb{R}^M$ entspricht dem Verfahren für $y(t) = F(y(t))$ mit $F(y) = (y_1, 1)$ und $y(t) = (u(t), t)$ in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.12) Ein Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent und von der Ordnung

$$
\begin{array}{lll}
p = 1, \text{ wenn} & \sum_s b_s = 1 & (1)\\
p = 2, \text{ wenn zusätzlich} & \sum_s b_s c_s = \frac{1}{2} & (2)\\
p = 3, \text{ wenn zusätzlich} & \sum_s b_s c_s^2 = \frac{1}{3} & (3)\\
 & \sum_{s,r} b_s a_{sr} c_r = \frac{1}{6} & (4)\\
p = 4, \text{ wenn zusätzlich} & \sum_s b_s c_s^3 = \frac{1}{4} & (5)\\
 & \sum_{s,r} b_s c_s a_{sr} c_r = \frac{1}{8} & (6)\\
 & \sum_{s,r} b_s a_{sr} c_r^2 = \frac{1}{12} & (7)\\
 & \sum_{s,r,t} b_s a_{sr} a_{rt} c_t = \frac{1}{24} & (8)
\end{array}
$$

gilt.

(2.11) Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann erfüllt die Verfahrensfunktion ψ für explizite Runge-Kutta-Verfahren eine Λ-Bedingung in (2.4).

(2.13) Ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \\ \hline & \hat{b}^T \end{array}$ definiert zwei Verfahrensfunktionen

$$\psi(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} b_s k_s\,, \qquad \hat{\psi}(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} \hat{b}_s k_s$$

und $\eta(t,\tau,z) = \psi(t,\tau,z) - \hat{\psi}(t,\tau,z)$ schätzt den lokalen Diskretisierungsfehler $g(t,\tau,z)$.

(2.14) Sei f glatt und u Lösung einer AWA in $[t_0, t_0+T]$.
Sei ψ ein Verfahren der Ordnung p, und sei u_τ die diskrete Lösung.
Dann existieren glatte Funktionen $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots$ mit $a_j(t_0) = 0$ und

$$u_\tau(t) = u(t) + a_p(t)\tau^p + a_{p+1}(t)\tau^{p+1} + \cdots + O(\tau^{p+k})$$

für alle k und $t \in t_0 + \mathbb{N}_0\tau \cap [t_0, t_0+T]$.

(2.15) Für $\psi_2(t,\tau,z) = \psi(t+\tau/2, \tau/2, z + (\tau/2)\psi(t,\tau/2,z))$ gilt

a) Das extrapolierte Verfahren

$$\psi^{\text{ex}}(t,\tau,z) = \frac{1}{2^p-1}\Big(2^p\psi_2(t,\tau,z) - \psi(t,\tau,z)\Big)$$

hat die Konsistenzordnung $p+1$.

b) Der lokale Diskretisierungsfehler lässt sich durch

$$\eta(t,\tau,z) = \frac{1}{2^p-1}\Big(\psi_2(t,\tau,z) - \psi(t,\tau,z)\Big) = g(t,\tau,z) + O(\tau^{p+1})$$

schätzen.

Anwendung für $\psi(t,\tau,z) = f(t,z)$ und $p=1$: a_1 löst die lineare AWA

$$\dot{a}_1(t) = \frac{1}{2}\ddot{u}(t) + D_2 f(t,u(t))a_1(t), \qquad a_1(0) = 0.$$

Für die Extrapolationen gilt

$$\begin{aligned} 2u_{\tau/2}(t) - u_\tau(t) &= u(t) - (1/2)a_2(t)\tau^2 + \cdots + O(\tau^{1+k}), \\ 8u_{\tau/4}(t) - 6u_{\tau/2}(t) - u_\tau(t) &= u(t) - (13/8)a_3(t)\tau^3 + \cdots + O(\tau^{1+k}) \qquad \dots \end{aligned}$$

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.1) Zu $\tau > 0$ und $t_n = t_0 + n\tau$ seien $u_0, \dots, u_{k-1}$ Näherungen für die Lösung der AWA (1.1) zu den Zeitpunkten $t_0, \dots, t_{k-1}$. Ein lineares Mehrschrittverfahren definiert $u^k, \dots, u^n$ rekursiv durch

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j} u^{n-j} = \tau \sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j} f^{n-j} \text{ für } n = k, \dots, N \text{ mit } f^j = f(t^j, u^j)\,.$$

(3.2) Für f sei eine L-Bedingung erfüllt, und sei $\tau L |\beta_k| < 1$. Dann konvergiert

$$u^{n,l} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_{k-j} u^{n-j} + \tau \beta_k f(t_n, u^{n,l-1}) + \tau \sum_{j=1}^{k} \beta_{k-j} f^{n-j}$$

für jedes $u^{n,0} \in G$ gegen die Lösung des Mehrschrittverfahrens.

(3.3) Zu $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ definiere den *lokalen Diskretisierungsfehler*

$$g^n = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j} u(t_{n-j}) - \sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j} \dot{u}(t_{n-j})\,.$$

(3.4) Sei u analytisch. Dann gilt

$$g^n = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \tau^j \Big(\frac{d}{dt}\Big)^j u(t_{n-k})$$

mit $C_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i$ und $C_j = \frac{1}{j!} \sum_{l=0}^{k} l^j \alpha_l - \frac{1}{(j-1)!} \sum_{l=0}^{k} l^{j-1} \beta_l$ für $j > 0$. Ein Verfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn $C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0,\ C_{p+1} \neq 0$. C_{p+1} heißt *Fehlerkonstante*.

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.5) Ein Mehrschrittverfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn der lokale Diskretisierungsfehler für Polynome vom Grad p verschwindet.

(3.7) Sei $\chi(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i = \prod_{\nu=1}^{r} (\lambda - \lambda_\nu)^{m_\nu}$ mit $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$ für $\nu \neq \mu$ und $\sum_{\nu=1}^{r} m_\nu = k$. Dann hat jede Lösung $(z_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ der linearen Differenzengleichung $\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} z_{n-i} = 0$ $(n \geq k)$ die Form $z_n = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_{\nu-1}} c_{\nu,j} \frac{n!}{(n-j)!} \lambda_\nu^n$. Die Koeffizienten $c_{\nu,j}$ sind durch $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$ bestimmt.

(3.8) Zu einem Mehrschrittverfahren definiere das *charakteristische Polynom* $\chi(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$.

(3.9) Ein Mehrschrittverfahren heißt *stabil* (0-stabil), wenn für alle Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms gilt: $|\lambda_i| \leq 1$, und alle Nullstellen mit $|\lambda_i| = 1$ sind einfach.

(3.10) Wenn ein Mehrschrittverfahren nicht stabil ist, dann ist die diskrete Lösung für $\tau \to 0$ für fast alle Anfangswerte unbeschränkt.

(3.11) Sei $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ eine Matrix mit Spektralradius $\rho = \rho(A)$, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = \rho$ die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit. Dann existiert eine symmetrisch positiv definite Matrix $S \in \mathbb{R}^{k,k}$ mit $|Az|_S \leq \rho |z|_S = \rho \sqrt{z^T S z}$ für $z \in \mathbb{R}^k$.

(3.12) Wenn ein stabiles Mehrschrittverfahren konsistent von der Ordnung p ist und $u^1, \ldots, u^{k-1}$ mit einem Verfahren der Ordnung $p-1$ berechnet werden gilt $|u(t_n) - u^n| = O(\tau^p)$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.1) Die Lösung einer AWA $\dot{u} = f(t,u)$ in $[0,\infty)$ mit $u(0) = u_0$ heißt *stabil*, wenn für alle u_0

$$|u(t)| \le C\,|u_0|$$

gilt, und *asymptotisch stabil*, wenn für alle u_0 gilt

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} |u(t)| = 0\,.$$

(4.2) Für lineare AWA hat ein Runge-Kutta-Verfahren die Form $u^n = R(\tau_n A)u^{n-1}$ mit

$$R(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} \qquad \text{und Polynomen} \qquad P,Q \in \mathbb{P}_S\,.$$

Für explizite Verfahren ist R ein Polynom.

Wenn das Verfahren die Ordnung p hat, gilt: $R(\zeta) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}\zeta^j + O(\zeta^{p+1})$.

(4.3) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *A-stabil*, wenn die linke Halbebene

$$\mathbb{C}_- = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ Re(\zeta) \le 0\} = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\exp(\zeta)| \le 1\}$$

im Stabilitätsgebiet $S = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ |R(\zeta)| \le 1\}$ enthalten ist.

(4.4) Für A-stabile Runge-Kutta-Verfahren gilt: Wenn die lineare AWA stabil ist, dann ist auch die numerische Lösung $u^n = R(\tau A)^n u^0$ stabil mit $|u^n| \le C\,|u^0|$ für alle Schrittweiten $\tau > 0$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.5) Ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren heißt *L-stabil*, wenn für die rationale Funktion $R(\infty) = \lim_{|\zeta|\to\infty} R(\zeta) = 0$ gilt.

(4.6) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren mit $a_{Sr} = b_r$, $r = 1, \dots, S$, und sei $\mathscr{A}$ invertierbar. Dann ist das Verfahren L-stabil.

(4.7) $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ ist genau dann schiefsymmetrisch (d. h. $A^T = -A$), wenn $\exp(tA)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal ist, d. h. $\exp(tA)\exp(tA)^T = I_M$.

(4.8) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *reversibel*, wenn $R(\zeta)\,R(-\zeta) \equiv 1$.

(4.9) Sei R rationale Funktion zu einem Runge-Kutta-Verfahren mit $R(\zeta) = 1 + \zeta + O(\zeta^2)$, und R habe keine Polstelle in $\mathbb{C}_-$. Dann ist äquivalent:

a) $S = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |R(\zeta)| \le 1\} = \mathbb{C}_-$
b) $|R(\zeta)| = 1$ für $\mathrm{Re}(\zeta) = 0$
c) $R(\zeta)\,R(-\zeta) \equiv 1$

(4.10) Sei $A^T = -A$ schiefsymmetrisch und sei R rationale Funktion eines Runge-Kutta-Verfahrens mit $S = \mathbb{C}_-$. Dann gilt:
$R(\tau A)$ ist orthogonal und $|u^n|_2 = |u^{n-1}|_2$ für $u^n = R(\tau A) u^{n-1}$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.12) Eine Funktion $f \in C([t_0, t_0+T] \times G, \mathbb{R}^M)$ heißt *monoton* (in der zweiten Komponente), wenn bzgl. einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$

$$\big(f(t,z) - f(t,y), z-y\big) \geq 0 \qquad t \in [t_0, t_0+T], \quad z, y \in G.$$

gilt.

(4.11) Eine AWA $\dot{u}(t) = f\big((t, u(t)\big)$, $t \in [t_0, t_0+T]$ heißt dissipativ, wenn $-f$ monoton ist. Dann gilt für jede weitere Lösung $\dot{v}(t) = f\big((t, v(t)\big)$

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(t_0) - v(t_0)|, \qquad t \in [t_0, t_0+T].$$

(4.12) Ein Einschrittverfahren ψ heißt *B-stabil*, wenn für dissipative AWA

$$|u^n - v^n| \leq |u^{n-1} - v^{n-1}|$$

mit $u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1})$ und $v^n = v^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, v^{n-1})$ gilt.

(4.13) B-stabile Runge-Kutta-Verfahren sind A-stabil.

(4.14) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt algebraisch stabil, wenn

a) $\mathscr{M} = \mathrm{diag}(b_s)\mathscr{A} + \mathscr{A}^T \mathrm{diag}(b_s) - bb^T$ positiv semidefinit

b) $b_s \geq 0$

(4.15) Algebraisch stabile Runge-Kutta-Verfahren sind B-stabil.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.16) Zu Stützstellen $0 \le c_1 < c_2 < \cdots < c_S \le 1$ definieren wir ein *Kollokationsverfahren* durch: Bestimme ein Polynom $P \in \mathbb{P}_S(\mathbb{R}^M)$ mit $P(t_{n-1}) = u^{n-1}$ und

$$\frac{d}{dt} P(t_{n,s}) = f(t_n, P(t_{n,s})) \quad \text{für} \quad t_{n,s} = t_{n-1} + c_s \tau_n\,, \qquad s = 1, \dots, S$$

und setze $u^n = P(t_n)$ (falls diese Interpolationsaufgabe lösbar ist).

(4.17) Das Kollokationsverfahren ist ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$b_s = \int_0^1 L_s(t)dt \ \text{ und } \ a_{sr} = \int_0^{c_s} L_r(t)dt \ \text{ für } \ L_s(t) = \prod_{\substack{r=1\\ r\neq s}}^{S} \frac{t - c_r}{c_s - c_r}.$$

(4.18) Wenn die Quadratur (c_s, b_s) die Fehlerordnung p hat (d.h., die Quadratur ist für Polynome von Grad $p-1$ exakt), dann hat auch das Kollokationsverfahren die Ordnung p. Für die Gauß-Quadratur gilt $p = 2S$.

(4.19) Die Kollokationsverfahren zur Gauß- und Radau-Quadratur sind B-stabil.

(4.20) Das Kollokationsverfahren zur Gauß-Quadratur ist reversibel.
Wenn die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ ein quadratisches erstes Integral

$$\mathscr{E}(z) = z^T Q z + b^T z + e$$

erhält, d.h., $\mathscr{E}(u(t)) \equiv \text{const.}$, dann gilt auch für das Gauß-Verfahren $\mathscr{E}(u^n) = \mathscr{E}(u^{n-1})$.

4 Steife Differentialgleichungen – DAE-Systeme

(4.21) Seien f, g stetig differenzierbar und $D_3 g(t_0, u_0, v_0)$ invertierbar. Betrachte

$$\dot{u} = f(t,u,v), \qquad 0 = g(t,u,v), \qquad u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0,\ g(t,u_0,v_0) = 0\ .$$

Dann existiert $T > 0$, sodass die DAE in $[t_0, t_0 + T]$ eindeutig lösbar ist.

(4.22) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit $a_{Sr} = b_r$ und

$$\begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{n-1} \\ v^{n-1} \end{pmatrix} + \tau \sum_{s=1}^{S} b_s \begin{pmatrix} k_s \\ \ell_s \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} k_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \\ g(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} u^{n,s} &= u^{n-1} + \tau_n \sum a_{sr} k_r, \\ v^{n,s} &= v^{n-1} + \tau_n \sum a_{sr} \ell_r. \end{aligned}$$

Dann gilt $\big|(u^n, v^n) - (u(t_n), v(t_n))\big| = O(\tau^p)$.

(4.23) Sei zusätzlich $\mathscr{A}$ invertierbar. Dann konvergiert die Runge-Kutta-Lösung zu

$$\dot{u}^\varepsilon = f(t,u^\varepsilon,v^\varepsilon), \quad \varepsilon \dot{v}^\varepsilon = g(t,u^\varepsilon,v^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(t_0) = u_0,\ v^\varepsilon(t_0) = v_0,\ g(t,u_0,v_0) = 0$$

für $\varepsilon \longrightarrow 0$ gegen die Lösung von (4.22).

5 Randwert-Aufgaben: Lineare Randwertaufgaben

(5.1) Zu $I = [\alpha,\beta]$, $A \in C(I,\mathbb{R}^{M,M})$, $b \in C(I,\mathbb{R}^M)$, $B_\alpha, B_\beta \in \mathbb{R}^{M,M}$, $g \in \mathbb{R}^M$ betrachte die allgemeine inhomogene lineare RWA $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ für $t \in I$ und $B_\alpha u(\alpha) + B_\beta u(\beta) = g$.

(5.2) Sei $u^0 \in C^1(I)$ Lösung der inhomogenen AWA $\dot{u}^0(t) = A(t)u^0(t) + b(t)$ mit $u^0(\alpha) = 0$, und für $m = 1,...,M$ seien $u^m \in C^1(I)$ Lösungen der AWA $\dot{u}^m(t) = A(t)u^m(t)$ mit $u^m(\alpha) = e^m$.
Dann ist $U(t) = \big(u^1(t),\dots,u^M(t)\big)$ ein Fundamentalsystem, und für jede Lösung von (5.1) gilt

$$u(t) = u^0(t) + \sum_{m=1}^{M} y_m u^m(t)$$

mit $y \in \mathbb{R}^M$ als Lösung von $\big(B_\alpha + B_\beta U(\beta)\big)y = g - B_b u^0(\beta)$.
Also gilt: Entweder, $Q := B_\alpha + B_b U(b)$ ist regulär (und damit (5.1) eindeutig lösbar), oder Q ist singulär, d. h. falls $Qy = g - B_b u^0(\beta)$ lösbar ist, ist die Lösung nicht eindeutig, und sonst existiert keine Lösung (Fredholmsche Alternative).

(5.3) Sei u^0_τ diskrete Lösung der AWA $\dot{u}^0 = Au^0 + b$ mit $u^0(\alpha) = 0$, und seien u^m_τ diskrete Lösungen der AWA $\dot{u}^m = Au^m, u^m(\alpha) = e^m$ für $m = 1,\dots,M$. Sei $y_\tau \in \mathbb{R}^M$ Lösung von $Q_\tau y_\tau = g - B_b u^0_\tau(b)$ mit $Q_\tau = B_\alpha + B_\beta U_\tau(\beta)$ und $U_\tau = (u^1_\tau,\dots,u^M_\tau)$, und sei $u_\tau = u^0_\tau + \sum_{m=1}^M y_{\tau,m} u^m_\tau$. Es gelte $|u^m(t_n) - u^m_\tau(t_n)| = O(\tau^p)$ für $m = 0,\dots,m$, $t_n = \alpha + n\tau$.
Dann gilt: Wenn $Q = B_\alpha + B_\beta U(\beta)$ regulär ist, dann existiert ein $\tau_0 > 0$, sodass Q_τ für $\tau < \tau_0$ regulär ist, und es gilt für die Lösung der RWA

$$|u(t_n) - u_\tau(t_n)| = O(\tau^p)\,.$$

5 Randwert-Aufgaben: Schieß-Verfahren

(5.4) Seien $I=[\alpha,\beta]$, $f\in C(I\times\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^M)$ und $g\in C(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^M)$ gegeben.
Dann lautet die allgemeine RWA:
Bestimme $u\in C^1(I,\mathbb{R}^M)$ mit $\dot u = f(t,u)$ in $I=[\alpha,\beta]$ und $g\big(u(\alpha),u(\beta)\big)=0$.

(5.5) Sei $f\in C^1(I\times\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^M)$. Dann ist die Lösung $u(\cdot;v)$ der AWA $\dot u(t;v)=f(t,u(t;v))$ mit $u(\alpha;v)=v$ nach v differenzierbar mit $J(t)=D_v u(t;v)\in C^1(I,\mathbb{R}^{M,M})$.
J erfüllt die lineare Matrix - AWA

$$\dot J(t) = D_2 f\big(t,u(t;v)\big)J(t) \qquad J(\alpha)=I_M$$

und es gilt $J(t)e^k = \lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{1}{\delta}\Big(u(t;v+\delta e^k)-u(t;v)\Big)$.

Schieß-Verfahren für allgemeine RWA

S0) wähle Startwert $v\in\mathbb{R}^M$

S1) berechne Approximation u^v der AWA mit $\dot u(t;v)=f(t,u(t;v))$ und $u(\alpha;v)=v$
berechne $G(v):=g\big(v,u(\beta;v)\big)$
falls $|G(v)|$ klein genug: STOP

S2) berechne eine Approximation $\triangle G$ von $DG(v)$ spaltenweise:

$$\text{Für } \delta>0 \text{ und } e^k \text{ setze } \triangle G(v)e^k = \frac{1}{\delta}\,\big(G(v+\delta e^k)-G(v)\big)$$

S3) berechne $v:=v-\big(\triangle G(v)\big)^{-1}G(v)$. Gehe zu S1).

5 Randwert-Aufgaben: Mehrzielmethode

S0) Wähle eine Zerlegung $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_R = \beta$.
Wähle Startwerte $v = (v^0, ..., v^R) \in \mathbb{R}^{M(R+1)}$.

S1) berechne Approximation u^r der AWA mit

$$\dot{u}^r = f(t, u^r), \quad u^r(t_{r-1}) = v^{r-1}\,.$$

berechne $G(v) := (G_r(v))_{r=0,...,R}$ mit $G_0(v) = g(v^0, v^R)$ und
$G_r(v) = u^r(t_r) - v^r$ für $r = 1, ..., R$.
falls $|G(v)|$ klein genug: STOP

S2) berechne eine Approximation $\triangle G(v)$ von $G'(v)$.

S3) berechne $v := v - \big(\triangle G(v)\big)^{-1} G(v)$. Gehe zu S1).

(5.5) Für lineare RWA $\dot{u} = Au + f$ mit $B_\alpha u(\alpha) + B_\beta u(\beta) = g$ gilt:
Wenn die RWA eindeutig lösbar ist, dann ist die Matrix $DG(v)$ regulär.

Für allgemeine RWA $\dot{u} = f(t, \dot{u})$ mit $g(u(\alpha), u(\beta)) = 0$ gilt:
Wenn die RWA eine isolierte Lösung besitzt und f, g hinreichend glatt sind,
dann ist G differenzierbar und die Matrix $DG(v)$ in einer Umgebung der Lösung regulär.

6 Finite Differenzen

(6.1) Für $\partial_h^+ u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x+h) - u(x)\big)$ gilt $|\partial_h u(x) - u'(x)| \le \frac{1}{2}\, h\, \|u''\|_\infty$.
Für $\partial_h u(x) = \frac{1}{2h}\big(u(x+h) - u(x-h)\big)$ gilt $|\partial_h u(x) - u'(x)| \le \frac{1}{6}\, h^2\, \|u'''\|_\infty$.
Für $\partial_{h/2}^2 u(x) = \frac{1}{h^2}\big(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\big)$ gilt $|\partial_{h/2}^2 u(x) - u''(x)| \le \frac{1}{12}\, h^2\, \|u''''\|_\infty$.

(6.2) Sei $I = [\alpha,\beta]$ ein Intervall, $p \in C^1(\alpha,\beta)$ mit $p(x) > 0$ und $q, r \in C(a,b)$. Für $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$ ist $Lu = -(pu')' + qu' + ru$ der Sturm-Liouville-Operator.

(6.3) Sei $N > 0$ und $h = \dfrac{\beta-\alpha}{N+1}$, $x_n = \alpha + nh$, $\Delta = \{x_0, \dots, x_{N+1}\}$.
Zu einer Gitterfunktion $u^h \colon \Delta \to \mathbb{R}^{N+2}$ betrachte die *Differenzengleichung* $L_h u^h = f^h$ mit

$$L_h u^h(x_n) = -\partial_{h/2}(p\partial_{h/2} u^h)(x_n) + q(x_n)\partial_h u^h(x_n) + r(x_n) u^h(x_n)\,, \quad n = 1, \dots, N$$

und $u_0 = u_{N+1} = 0$. Setze $\|u^h\|_{\infty,\Delta} := \max\limits_{1\le n\le N} |u^h(x_n)|$.

(6.4)
a) Ein Differenzenverfahren heißt konsistent von der Ordnung p, wenn für die Interpolation $I_h u$ $\big($mit $(I_h u)(x_n) = u(x_n)\big)$ der exakten Lösung u gilt:
$$\|L_h(I_h u) - I_h L u\|_{\infty,\Delta} = O(h^p)\,.$$
b) Es heißt stabil, wenn $\|L_h^{-1}\|_{\infty,\Delta} \le C$ unabhängig von $0 < h < h_0$.

(6.5) Das Differenzenverfahren (6.3) sei konsistent von der Ordnung p und stabil.
Dann ist es konvergent, d.h. $\|u^h - u\|_{\infty,\Delta} = O(h^p)$ für $h \to 0$.

6 Finite Differenzen

Betrachte die elliptische Gleichung $u = f$ in $\Omega = (0;1)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$.
Definiere zur Schrittweite $h > 0$

$$\Delta_h u(x_1, x_2) = \frac{1}{h^2}\Big(4u(x_1,x_2) + u(x_1 - h, x_2) + u(x_1 + h, x_2) + u(x_1, x_2 - h) + u(x_1, x_2 + h)\Big)\,.$$

Sei $\Omega_h = h\mathbb{Z}^2 \cap \Omega$, $\bar\Omega_h = h\mathbb{Z}^2 \cap \bar\Omega$, $\partial\Omega_h = h\mathbb{Z}^2 \cap \partial\Omega$.
Für Gitterfunktionen $V^h = \{u^h \colon \bar\Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $u^h(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega_h\}$ definiere

$$\|u^h\|_{\infty,\Omega_h} = \max_{x\in\Omega_h} |u^h(x)|\,.$$

(6.6) Wenn u genügend glatt ist, dann gilt $|u^h(x) - u(x)| \le Ch^2\big(\|\partial_1^u\|_\infty + \|\partial_2^u\|_\infty\big)$ für $x \in \Omega_h$.

Nun betrachte die parabolische Gleichung $\dot u - \Delta u = f$ in $\Omega \times (0,T)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und dem Anfangswert $u(0) = u_0$.

Zur Zeitschrittweite $t > 0$ und $t_n = n\tau$ definiere $f^{h,n}(x) = f(x,t_n)$ für $x \in \Omega_h$ und

$$\frac{1}{\tau}\Big(u^{h,n} - u^{h,n-1}\Big) - \Delta_h u^{h,n} = f^{h,n}\,, \qquad u^{h,0} = u_0(x)\,.$$

(6.7) Wenn u genügend glatt ist, dann gilt für $x \in \Omega_h$ im Zeitschritt n

$$|u^{h,n}(x) - u(x,t_n)| \le Ct_n(\tau + h^2)\big(\|\partial_1^u\|_\infty + \|\partial_2^u\|_\infty + \|\partial_t^2 u\|_\infty\big)\,.$$

6 Finite Differenzen

Betrachte die hyperbolische Gleichung $-\rho\ddot{q} - \kappa\Delta q = 0$ in $(0,1)^2 \times (0,T)$ mit $q = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei $c\sqrt{\rho/\kappa}$ die Wellengeschwindigkeit und $u = (p,\sigma)$ mit $p = \rho\dot{q}$ und $\sigma = c\nabla q$, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= c\,\mathrm{div}\,\sigma \\ \dot{\sigma} &= c\nabla p \end{aligned}$$

Definiere zu Schrittweiten $h > 0$ und τ die Punkte $x_{j,k} = (jh, kh)$ und $t_n = n\tau$ für $j,k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$. Nun approximiere p and x_{jk} zum Zeitpunkt t_n, σ_1 an $x_{j+1/2,k}$ zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$ und σ_2 an $x_{j,k+1/2}$ zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$ mit zentralen Differenzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}\left(p_{jk}^n - p_{jk}^{n-1}\right) &= \frac{c}{h}\left(\sigma_{j+1/2,k}^{n-1/2} - \sigma_{j-1/2,k}^{n-1/2}\right) + \frac{c}{h}\left(\sigma_{j,k+1/2}^{n-1/2} - \sigma_{j,k-1/2}^{n-1/2}\right) \\ \frac{1}{\tau}\left(\sigma_{j+1/2,k}^{n+1/2} - \sigma_{j+1/2,k}^{n-1/2}\right) &= \frac{c}{h}\left(p_{j+1,k}^n - p_{jk}^n\right) \\ \frac{1}{\tau}\left(\sigma_{j,k+1/2}^{n+1/2} - \sigma_{j,k+1/2}^{n-1/2}\right) &= \frac{c}{h}\left(p_{j,k+1}^n - p_{jk}^n\right) \end{aligned}$$

Definiere $\mathscr{E}^n = \frac{h^2}{\rho}\sum_{jk} |p_{jk}^n|^2 + \sigma_{j+1/2,k}^{n+1/2}\sigma_{j+1/2,k}^{n-1/2} + \sigma_{j,k+1/2}^{n+1/2}\sigma_{j,k+1/2}^{n-1/2}$.

(6.8) Es gilt $\mathscr{E}^n = \mathscr{E}^{n-1}$.

(6.9) Sei $\theta = ct/h < 1/2$. Dann gilt $\mathscr{E}^n > 0$.

(6.10) Sei $\theta = ct/h < 1/2$. Wenn die Lösung (p,σ) genügend glatt ist, gilt für den Fehler $O(\tau^2 + h^2)$, und der Fehler wächst in der Zeit mit t_n.

7 Variationsmethoden

Zu einer Zerlegung $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{K+1} = \beta$ definiere $h = \max_k x_k - x_{k-1}$ und

$$V_h = \{v_h \in C[\alpha,\beta] \colon v_h(\alpha) = v_h(\beta) = 0 \ \text{ und } \ v_h|_{[x_{k-1},x_k]} \in \mathbb{P}_1\}\,.$$

Zu $p,q,r \colon (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiere

$$a(v,w) = \sum_{k=1}^{K+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (pv'w' + qv'w + rvw)\,dx\,, \qquad \ell(v) = \int_\alpha^\beta fv\,dx\,.$$

Dann gilt für jede Lösung u von $-(pu')' + qu' + ru = f$ und jede Testfunktion v mit $v(\alpha) = v(\beta) = 0$

$$a(u,v) = \ell(v)\,.$$

(7.1) Sei $\|v\|_0 = \int_\alpha^\beta |v|^2\,dx$ die Norm in $L_2(\alpha,\beta)$, und sei $\|v\|_1 = \sqrt{\|v'\|_0^2 + \|v\|_0^2}$.

a) Sei $C_P = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Es gilt $\|v_h\|_0 \le C_P\,\|v_h'\|_0$ für $v_h \in V_h$.
b) Es gilt $|\ell(v_h)| \le \|f\|_0 \|v_h\|_0$ für $v_h \in V_h$.
c) Es existiert $C_a \ge 0$ mit $|a(v_h,w_h))| \le C_a \|v_h'\|_0 \|w_h'\|_0$ für $v_h, w_h \in V_h$.
d) Sei zusätzlich $p - \rho_0 > \rho_1 > 0$ und $\rho_0 + C_P(r - \frac{1}{2}q') > \rho_1$.
Dann existiert $c_0 > 0$ mit $|a(v_h,v_h)| \le c_0\,\|v_h'\|_0^2$ für $v_h \in V_h$.

Unter der Bedingung d) existiert eine eindeutige *Galerkin-Approximation* $u_h \in V_h$ von

$$a(u_h,v_h) = \ell(v_h) \qquad v_h \in V_h\,.$$

(7.2) Es gilt $\|u - u_h\|_1 \le C \ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1\,.$

7 Variationsmethoden

Sei $V = \left\{ v \in C[\alpha,\beta] \colon v(x) = \int_\alpha^x w(y)\,dy \text{ mit } w \in L_2(\alpha,\beta) \text{ und } v(\beta) = 0 \right\}$.

(7.3) V ist ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_1$, und es gilt $\|v\|_0 \leq \|v'\|_0$ für alle $v \in V$.

(7.4) Seien $a(\cdot,\cdot)$ und $\ell(\cdot)$ beschränkt in V, und $a(\cdot,\cdot)$ sei elliptisch, d.h. $a(v,v) \geq c_0\|v\|_1^2$ für $v \in V$. Dann existiert eine Lösung $u \in V$ von $a(u,v) = \ell(v)$ für $v \in V$.

(7.5) Sei zusätzlich $u'' \in L_2(\alpha,\beta)$. Dann gilt $\|u - u_h\|_1 \leq Ch\|u''\|_0$.

(7.5) Wenn zusätzlich $p, p', q, r \in C[\alpha,\beta]$, dann existiert $C > 0$ mit $\|u''\|_0 \leq \|f\|_0$ mit C unabhängig von f, und es gilt $\|u - u_h\|_0 \leq Ch^2\|u''\|_0$.

Nun betrachte $-\varepsilon u'' + u' + u = f$. Zu $\delta > 0$ definiere

$$a_\delta(v,w) = \int_\alpha^\beta \big(\varepsilon v'w' + (v'+v)(w + \delta w')\big)\,dx\,, \qquad \ell_\delta(v) = \int_\alpha^\beta f(v + \delta v')\,dx\,.$$

(7.6) Sei $h \geq \varepsilon$ und $\delta = h \leq 1$. Dann gilt $\|u - u_h\|_\delta \leq Ch^{3/2}\|u''\|_0$.