1 Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

(1.1) Sei Ω eine Menge und $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ein Mengenystem von Teilmengen. Dann heißt $(\Omega, \mathscr{A})$ eine *σ-Algebra*, wenn $\Omega \in \mathscr{A}$ und

$$A \in \mathscr{A} \quad \Longrightarrow \quad \Omega \setminus A \in \mathscr{A}\,,$$
$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}\,.$$

Das Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ heißt *Messraum*, die Mengen $A \in \mathscr{A}$ heißen *messbar*.

Wenn Ω ein normierter Raum ist, dann ist die *Borelsche σ-Algebra* $\mathscr{B}(\Omega)$ die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von Ω enthält.
Wir setzen $\mathscr{B}^n = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

(1.2) Eine Funktion $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0,\infty]$ heißt *Maß*, wenn $\mu(\emptyset) = 0$, und wenn für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathscr{A}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\,.$$

Das Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ heißt *Maßraum*.

(1.3) Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* (W-Maß) $\mathbb{P}$ ist ein normiertes Maß ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$).
Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* (W-Raum) ist ein Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ mit normiertem Maß.

(aus Last/Henze: Mathematik für Wirtschafswissenschaftler)

1 Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

(1.4) Sei $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ ein Messraum. Eine Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{X}$ heißt *Zufallsvariable*, wenn $X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ für alle $B \in \mathscr{X}$. Damit wird ein W-Maß $\mathbb{P}^X$ durch $\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ definiert. Es heißt die *Verteilung* von X. Wir schreiben $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$. Für $\omega \in \Omega$ heißt $X(\omega)$ *Realisierung* von X.

Spezialfall: Im kanonischen Modell gilt $\Omega = \mathbb{X}$ und $\mathscr{A} = \mathscr{X}$.

(1.5) Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{X}$ heißen *identisch verteilt* wenn ihre Verteilungen übereinstimmen.

(1.6) Ereignisse $A_1, \ldots, A_N$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $I \subset \{1, \ldots, N\}$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \prod_{n\in I} \mathbb{P}(A_n)\,.$$

Mengensysteme $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_N \subset \mathscr{A}$ heißen unabhängig, wenn für alle $I \subset \{1, \ldots, N\}$ und jede Wahl $A_n \in \mathscr{M}_n$ die Ereignisse $(A_n)_{n\in I}$ unabhängig sind.
Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ heißen unabhängig, wenn die σ-Algebren $\sigma(X) = \{X^{-1}(B)\colon B \in \mathscr{X}\}$ unabhängig sind.

(aus Last/Henze: Mathematik für Wirtschafswissenschaftler)

1 Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

(1.7) Im Fall $(\mathbb{X},\mathscr{X}) = (\mathbb{R},\mathscr{B}^1)$ heißt X *reele Zufallsvariable*, und die Funktion $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ mit $F(x) = \mathbb{P}^X((-\infty,x])$ heißt *Verteilungsfunktion* von X. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ mit $\mathbb{P}(X\in B) = \int_B f(x)\,dx$ heißt *Verteilungsdichte*.

Gleichverteilung ($X \sim U(a,b)$): $f(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in [a,b]$, $f(x) = 0$ sonst.

Normalverteilung ($X \sim N(\mu,\sigma^2)$): $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$

(1.8) Für meßbare reelle Zufallsvariablen $X \in L_1(\Omega,\mathbb{P})$ heißt $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P}$ der *Erwartungswert* von X. Ist $X \in L_2(\Omega,\mathbb{P})$, dann heißt $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big)$ die *Varianz* von X. Für Zufallsvariablen $X,Y \in L_2(\Omega,\mathbb{P})$ heißt $C(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big)$ die *Kovarianz*.
X,Y heißen *unkorrelliert*, wenn $C(X,Y) = 0$.

(1.9) Seien $X_1, X_2, \ldots \in L_2(\Omega,\mathbb{P})$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für den Mittelwert $S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N X_n$: Die Verteilung von $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} S_N$ konvergiert gegen $N(\mu,1)$:

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{\sqrt{N}}{\sigma} S_N \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\Big)\,dx\,.$$

(aus Last/Henze: Mathematik für Wirtschafswissenschaftler)

2 Pseudo-Zufallszahlen

(2.1) Wirklich zufällige Zahlen gibt es auf dem Computer nicht.

Eine Zahlenfolge $X_1, X_2, \dots$ heißt *gleichverteilt* in $Q \subset \mathbb{R}^d$, wenn für alle $A \in \mathscr{B}(Q)$ gilt: $\lim\limits_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N} \#\Big\{(X_{(n-1)d+1}, \dots, X_{nd}) \in A \colon n = 1, \dots, N\Big\} = \frac{\lambda(A)}{\lambda(Q)}$.

Zahlen $X_1, X_2, \dots$ heißen *Pseudo-Zufallzahlen*, wenn sie nahezu zufällig sind.

(2.5) Prim-Modulo-Generator: $X_n = aX_{n-1} \mod p \quad (p \text{ prim}, a \in \{2, \dots, p-1\})$
Dann ist $X_0, X_1, \dots$ ist periodisch mit der Period $p-1$.

(2.6) $p-1$ ist die kleinste Periode, falls $a^{(p-1)/q} \not\equiv 1$ für alle Primteiler q von $p-1$.

(2.7) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und $U(0,1)$-verteilt, sei $A_0 \cup \dots \cup A_K = [0,1)$ eine disjunkte Zerlegung mit $A_k \in \mathscr{B}([0,1))$, und sei $\mathbb{P} = \lambda$ das W-Maß in $[0,1)$.
Sei $\mathbb{P}_N(X(\omega) \in A_k) = \frac{1}{N} \#\Big\{X_n(\omega) \in A_k \colon n = 1, \dots, N\Big\}$ und

$$\chi^2_N(X(\omega)) = N \sum_{k=0}^{K} \frac{\big(\mathbb{P}_N(X(\omega) \in A_k) - \mathbb{P}(A_k)\big)^2}{\mathbb{P}(A_k))}.$$

a) $\lim\limits_{N\longrightarrow\infty} \mathbb{P}(\chi^2_N(X) > x) = \int_x^\infty f_K(t)\,dt, \quad f_K(t) = \frac{t^{K/2-1}\exp(-t/2)}{2^{K/2}\Gamma(K/2)}$.

b) Zu $\varepsilon > 0$ ex. $C > 0$ mit $\lim\limits_{N\longrightarrow\infty} \mathbb{P}\Big(|\mathbb{P}_N(X \in A_k) - \mathbb{P}(A_k)| \le \frac{C}{\sqrt{N}}\Big) \le 1 - \varepsilon$.

2 Normalverteilte Pseudo-Zufallszahlen

(2.8) Sei $X = (X_1, ..., X_N)$ ein Zufallsvektor mit $X_n \sim U(0,1)$, und sei $\varphi\colon (0,1)^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ein Diffeomorphismus.
Dann hat $Y = \varphi(X)$ die Dichte $f(\varphi(x)) = |\det D\varphi(x)^{-1}|$.

(2.9) Box-Muller-Verfahren
Generiere Pseudo-Zufallszahlen $U_1, U_2, ... \approx U(0,1)$.
Berechne $(X_{2n-1}, X_{2n}) = \rho_n(\cos\theta_n, \sin\theta_n)$
mit $\rho_n = \sqrt{-2\log U_{2n-1}}$ und $\theta_n = 2\pi U_{2n}$.

(2.10) Korrellierte Pseudo-Zufallszahlen
Sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch positiv definit, $\mu \in \mathbb{R}^N$, und $A \in \mathbb{R}^{N.N}$ mit $AA^T = \Sigma$.
Generiere einen Pseudo-Zufallszahlenvektor $X = (X_1, ..., X_N)$ mit $X_n \approx N(0,1)$.
Dann gilt für den Pseudo-Zufallszahlenvektor $Y = \mu + AX \approx N(\mu, \Sigma)$.

3 Hochdimensionale Quadratur

Sei für $f \in C^r([0,1])$

$$Q_K(f) = \sum_{k=1}^{K} b_k f(\xi_k) \quad \text{und } R_K(f) = Q_K(f) - \int_0^1 f(x)dx\,.$$

Wenn $|R_K(f)| \le CK^{-r}$ gilt, dann gilt für $f \in C^{dr}([0,1]^d)$

$$Q_{K,d}(f) = \sum_{k_1=1}^{K} b_{k_1} \cdots \sum_{k_d=1}^{K} b_{k_d} f(\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_d})$$

die Fehlerabsätzung $|R_{K,d}(f)| \le CK^{-r} = CN^{-r/d}$ mit $N = K^d$ Punkten.

(3.1) Quasi-Monte-Carlo-Quadratur
Wähle Pseudo-Zufallsvektoren $X^n \approx U([0,1]^d)$ und berechne

$$Q_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(X^n)\,.$$

Es gilt für alle stetige Funktionen $f \in C([0,1]^d)$:
Die Monte-Carlo-Quadratur mit Zufallsvektoren $X^n \sim U([0,1]^d)$ konvergiert fast sicher mit der Rate $1/\sqrt{N}$.

3 Hochdimensionale Quadratur

(3.2) Sei $g \geq 2$ und $n = \sum_{k=0}^{K_n} a_k g^k$ die g-adische Darstellung.
Dann heißt $\phi_g(n) = \sum_{k=0}^{K_n} a_k g^{-k-1}$ *Radix-Folge*,
und für teilerfremde $g_1, ..., g_d$ heißt $X = (\phi_{g_1}(n), ..., \phi_{g_1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *Halton-Folge*.

(3.3) Seien $X = (X^1, ..., X^N)$ Vektoren in $[0,1]^d$. Dann heißt

$$D_N(X) = \sup_{Q'\in\mathscr{B}} \left(\frac{1}{N}\#\{X^n \in Q' : n = 1, ..., N\} - \lambda(Q')\right)$$

die *Diskrepanz* von X (mit $\mathscr{B} = \{[a_1, b_1] \times \cdots [a_d, b_d] \subset [0,1]^d\}$) und

$$D_N^*(X) = \sup_{Q'\in\mathscr{B}^*} \left(\frac{1}{N}\#\{X^n \in Q' : n = 1, ..., N\} - \lambda(Q')\right)$$

die **Diskrepanz* von X (mit $\mathscr{B}^* = \{[0, b_1] \times \cdots [0, b_d] \subset [0,1]^d\}$).

(3.4) $T^{r,d}([0,1]) = \otimes_{k=1}^d C^r([0,1])$ mit $\|f\|_{T^{r,d}([0,1])} = \sup_{|\alpha|_\infty \leq r} \|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f\|_\infty$ ist der Banachraum, der alle Produkte $f(x) = f_1(x_1)\cdots f_d(x_d)$ enthält.

Sei $Q(X,f) = \frac{1}{\#X}\sum_{\xi\in X} f(\xi)$ und $R(X,f) = Q(X,f) - \int_{[0,1]^d} f(x)dx$.

(3.5) Für $f \in T^{r,d}([0,1])$ gilt $R(X,f) \leq C\, D_N^*(X)\,\|f\|_{T^{1,d}([0,1])}$.
Halton-Folgen haben niedrige Diskrepanz $D_N(X) \leq C(\log N)^d/N$.

3 Hochdimensionale Quadratur

(3.6) Zu $L_k f = \sum_{n=1}^{N_k} b_{k,n} f(\xi_{k,n})$ definiere $L = L_1 \otimes \cdots \otimes L_d$ durch

$$Lf = \sum_{n_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{n_d=1}^{N_d} b_{1,n_1} \cdots b_{d,n_d} f(\xi_{1,n_1}, \dots, \xi_{d,n_d}) .$$

(3.7) Sei $X^1 \subset X^2 \subset \cdots$ eine geschachtelte Folge von Quadraturpunkten mit $N_m = \# X^m \approx 2^m$. Sei $Q_m = \sum_{\xi \in X^m} b_\xi f(\xi)$ eine Quadraturformel mit

$$|Q_m(f) - \int_0^1 f(x)\,dx| \le C_r N_m^{-r} \|f\|_{C^r([0,1])} .$$

Setze $Q_0 = 0$ und $\Delta_m = Q_{m+1} - Q_m$.
Dann gilt für die Quadratur

$$Q^{M,d} = \sum_{|\alpha| \le M} \Delta_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \Delta_{\alpha_d}$$

die Fehler-Abschätzung

$$|Q^{M,d}(f) - \int_{[0,1]^d} f(x) dx| \le C_{M,d} \frac{(\log N_{M,d})^{(d-1)/(r+1)}}{N_{M,d}^r} \|f\|_{T^{r,d}([0,1])}$$

mit $N_{M,d} = \#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \colon |\alpha| \le M\}$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

4 Numerische Integration stochastischer Differentialgleichungen

(4.1) Eine Abbildung $X\colon [0,\infty)\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein *stetiger stochastischer Prozeß*, wenn $X_t = X(t,\cdot)$ eine Zufallsvariable und jede Realisierung $X(\cdot,\omega)$ stetig ist.

(4.2) Ein *Wiener Prozess* $W\colon [0,\infty)\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein stochastischer Prozeß mit $W_0 \sim 0$, $W_t - W_s \sim N(0,t-s)$ für alle $0 \le s \le t$, so dass $W_t - W_s$ und $W_r - W_u$ für alle $0 \le u \le r \le s \le t$ unabhängig sind. Es gibt einen Wiener Prozess mit $W \in L_2([0,\infty),\Omega)$ und $W(\cdot,\omega) \in C^\alpha([0,\infty))$ für alle $\alpha < 1/2$.

(4.3) Für einen stochastischen Prozess $X \in L_2([0,\infty),\Omega)$ definiert das *Itô-Integral* eine Zufallsvariable (falls die rechte Seite konvergiert)

$$\int_0^t X_s\,dW_s := \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} X_{t_n}(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}),$$

wobei $0 = t_0 < t_1 < \cdots t_N = t$ und $\max\{t_{n+1} - t_n\} \longrightarrow 0$ für $N \longrightarrow \infty$ gilt.

(4.4) Ein stochastischer Prozeß mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s,s)\,ds + \int_0^t b(X_s,s)\,dW_s$$

löst eine *stochastische Differentialgleichung von Itô* (SDE).
Schreibweise: $dX_t = a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\,dW_t$. X_t heißt *Itô Prozess*.

Die Lösung der SDE $dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$ mit $S_0 = 0$ heißt *geometrische Brownsche Bewegung*.

4 Numerische Integration stochastischer Differentialgleichungen

(4.5) *Itô-Formel*

Sei X_t ein Itô-Prozess mit $dX_t = a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\,dW_t$, und sei $f \in C^2(\mathbb{R},[0,\infty))$. Dann ist $Y_t = F(X_t,t)$ ein Itô-Prozess mit

$$dY_t = \Big(\frac{f}{\partial t} + a\frac{f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{f^2}{\partial x^2}\Big)(X_t,t)\,dt + \Big(b\frac{f}{\partial x}\Big)(X_t,t)\,dW_t\,.$$

(4.6) *Euler-Maruyama-Verfahren*

S0) Setze $X^0 = X_0$, $\Delta t = T/N$, $t_n = 0$ und $n = 1$.
S1) Wähle $Z^n \approx N(0,1)$ und setze $\Delta W^n = \sqrt{\Delta t}Z^n$.
S2) Setze $X^n = X^{n-1} + a(X^{n-1},t_{n-1})\,\Delta t + b(X^{n-1},t_{n-1})\,\Delta W^n$.
S3) Falls $n < N$, setze $n := n+1$, $t_n = n\Delta t$ und gehe zu S1).

(4.7) Sei X_t ein Itô-Prozess und $X_t^{\Delta t}$ eine Approximation.
Dann heißt das Approximations-Verfahren

a) stark konvergent, wenn $\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \mathbb{E}(|X_t - X_t^{\Delta t}|) = 0$
b) stark konvergent der Ordnung $p > 0$, wenn $\mathbb{E}(|X_t - X_t^{\Delta t}|) \le C\,(\Delta t)^p$
c) schwach konvergent, wenn $\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} |\mathbb{E}(X_t) - \mathbb{E}(X_t^{\Delta t})| = 0$
d) schwach konvergent der Ordnung $p > 0$, wenn $|\mathbb{E}(X_t) - \mathbb{E}(X_t^{\Delta t})| \le C\,(\Delta t)^p$

für alle $t \in [0,T]$ und $0 < \Delta t \le \Delta t_0$.

4 Numerische Integration stochastischer Differentialgleichungen

(4.8) Stochastische Taylor-Entwicklung von $dX_t = a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\,dW_t$

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + a(X_{t_0},t_0)(t-t_0) + b(X_{t_0},t_0)(W_t - W_{t_0}) \\ &\quad + \frac{1}{2} b'(X_{t_0},t_0) b'(X_{t_0},t_0)\big((W_t - W_{t_0})^2 - (t-t_0)\big) + O\big((t-t_0)^{3/2}\big) \end{aligned}$$

(4.9) Milstein-Verfahren

$$\begin{aligned} X^n &= X^{n-1} + a(X^{n-1},t_{n-1})\,\Delta t + b(X^{n-1},t_{n-1})\,\Delta W^n \\ &\quad + \frac{1}{2} b'(X^{n-1},t_{n-1}) b(X^{n-1},t_{n-1})\big((\Delta W^n)^2 - \Delta t\big) \end{aligned}$$

(4.10) Ein stochastisches Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} Y &= X^{n-1} + a(X^{n-1},t_{n-1})\,\Delta t + b(X^{n-1},t_{n-1})\,\sqrt{\Delta t} \\ X^n &= X^{n-1} + a(X^{n-1},t_{n-1})\,\Delta t + b(X^{n-1},t_{n-1})\,\Delta W^n \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}} \big(b(Y,t_{n-1}) - b(X^{n-1},t_{n-1})\big)\big((\Delta W^n)^2 - \Delta t\big) \end{aligned}$$

5 Numerische Auswertung der Black-Scholes-Gleichung

(5.1) Die Black-Scholes-Gleichung ist

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V^2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0\,.$$

(5.2) Die Black-Scholes-Formel (für eine Put-Option)

$$V(S,t) = S\Phi(d_1) - K\exp(-r(T-t))\Phi(d_2)$$

löst die Black-Scholes-Gleichung mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp(-s^2/2)\,ds$$

und

$$d_{1/2} = \frac{\log(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

5 Numerische Auswertung der Black-Scholes-Gleichung

Zur Auswertung betrachte Approximationen erf^* von

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2)\, dt\,.$$

a) Rationale Approximation: Bestimme ein Polynom P mit

$$\mathrm{erf}^*(x) = 1 - P(\eta)\,\mathrm{erf}'(x), \qquad \eta = \frac{1}{1+\alpha x}\,.$$

b) Euklidische Approximation: Bestimme erf^* in einem endlich-dimensionalen Raum mit

$$\int_0^{\infty} |\,\mathrm{erf}^*(x) - \mathrm{erf}(x)|^2\, dx = \min!$$

c) Kubische Hermite-Interpolation: Bestimme ein stückweises kubisches Polynom erf^* mit der Interpolationsbedinung

$$\mathrm{erf}^*(x_j) = \mathrm{erf}(x_j)\,, \qquad (\mathrm{erf}^*)'(x_j) = \mathrm{erf}'(x_j)\,, \qquad j = 1, \ldots, J\,.$$

d) Kubische Splines: Bestimme ein stückweises kubisches Polynom erf^* mit der Eigenschaft $\mathrm{erf}^* \in C^2(\mathbb{R}_+)$ und der Interpolationsbedinung

$$\mathrm{erf}^*(x_j) = \mathrm{erf}(x_j)\,, \qquad j = 1, \ldots, J\,.$$

6 Numerische Approximation der Black-Scholes-Gleichung

Betrachte die parabolische Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t)\,, \qquad (x,t) \in (a,b) \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \qquad x \in (a,b) \\ u(a,t) &= g_a(t)\,, \quad u(b,t) = g_b(t)\,, \qquad t \in (0,T] \end{aligned}$$

Wähle $N, J > 0$, $h = (b-a)/(J+1)$, $\tau = T/N$, $x_j = a + jh$, $t_n = n\tau$.
Zu $\theta \in [0,1]$ bestimme u_j^n für $j = 1,\dots,J$ und $n = 1,\dots,N$ mit

$$\frac{1}{\tau}\Big(u_j^n - u_j^{n-1}\Big) = \frac{1-\theta}{h^2}\Big(u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}\Big) + \frac{\theta}{h^2}\Big(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\Big)$$

mit Anfangs- und Randwerten

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u_0(x_j)\,, \qquad j = 1,\dots,J\,, \\ u_0^n &= g_a(t_n)\,, \quad u_{J+1}^n = g_b(t_n)\,, \qquad n = 1,\dots,N \end{aligned}$$

Setze $u^n = (u_1^n,\dots,u_J^n)$, $G = \mathrm{tridiag}(-1,2,-1)$, $A = I + \theta\alpha G$, $B = I - (1-\theta)\alpha G$ und $b^n = (\theta g_a(t_n) + (1-\theta)g_a(t_{n-1}), 0,\dots,0, \theta g_b(t_n) + (1-\theta)g_b(t_{n-1}))$.
Dann gilt

$$Au^n = Bu^{n-1} + b^n\,, \qquad n = 1,\dots,N\,.$$

6 Numerische Approximation der Black-Scholes-Gleichung

(6.1) Für $f \in C^4(\mathbb{R})$ und $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned} |(1/h)(f(x+h)-f(x))-f'(x)| &\le C\,h \sup_{x<y<x+h}|f''(y)| \\ |(1/2h)(f(x+h)-f(x-h))-f'(x)| &\le C\,h^2 \sup_{x-h<y<x+h}|f'''(y)| \\ |(1/h^2)(f(x+h)-2f(x)+f(x-h))-f''(x)| &\le C\,h^2 \sup_{x-h<y<x+h}|f''''(y)| \end{aligned}$$

(6.2) Die Matrix $A = \mathrm{tridiag}(-\theta\alpha, 1+2\theta\alpha, -\theta\alpha)$ ist invertierbar.

(6.3) Sei $\theta \ge 1/2$ oder $\alpha < 1/(2-4\theta)$ falls $\theta < 1/2$. Dann gilt $\rho(A^{-1}B) < 1$, d.h. die numerische Lösung ist stabil.

(6.4) Für den lokalen Diskretisierungsfehler einer Lösung von $\partial_t u = \partial_x^2 u$

$$\begin{aligned} g_j^n \;=\; & \frac{1}{\tau}\Big(u(x_j,t_n)-u(x_j,t_{n-1})\Big) - \frac{\theta}{h^2}\Big(u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)\Big) \\ & - \frac{1-\theta}{h^2}\Big(u(x_{j+1},t_{n-1})-2u(x_j,t_{n-1})+u(x_{j-1},t_{n-1})\Big) \end{aligned}$$

gilt $|g_j^n| = O(\tau^\beta + h^2)$ mit $\beta = 2$ für $\theta = 1/2$ and $\beta = 1$ sonst.

(6.5) Aus Stabilität (6.3) und Konsistenz (6.4) folgt Konvergenz:

$$\Big(\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}|u_j^n - u(x_j,t_n)|^2\Big)^{1/2} = O(\tau^\beta + h^2).$$

7 Finite-Elemente-Approximation der Black-Scholes-Gleichung

Betrachte die Black-Scholes-Gleichung $\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + rS\partial_S V - rV = 0$.
Setze $x = S$, $v(x,t) = V(S, T-t)$.

(7.1) Für alle Testfunktionen $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+) := C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ gilt

$$(\partial_t v(t), \phi)_0 + a(v(t), \phi) = 0$$

mit $(f,g)_0 = \int_0^\infty fg\,dx$, $a(f,g) = \int_0^\infty \Big(\frac{\sigma^2}{2}x^2\partial_x f\partial_x g + (\sigma^2 - r)x\partial_x fg + rfg\Big)\,dx$.

(7.2) $\mathscr{D}(\mathbb{R}_+)$ ist dicht im Hilbertraum $W := \{v \in L_2(\mathbb{R}_+) \colon x\partial_x v \in L_2(\mathbb{R}_+)\}$ mit der Norm $\|w\|_W = \sqrt{\|w\|_0^2 + \|x\partial_x w\|_0^2}$.

(7.3) Es gilt $\|w\|_0 \le 2\,\|x\partial_x w\|_0$, d. h., $|w|_W = \|x\partial_x w\|_0$ ist eine Norm in W.

(7.4) Es gilt für $v, w \in W$

$$\begin{aligned} a(v,w) &\le C\,|v|_W\,|w|_W\,, \\ a(v,v) &\ge \frac{\sigma^2}{4}\,|v|_W^2 - c\,\|v\|_0^2\,. \end{aligned}$$

(7.5) Die parabolische Gleichung (7.1) besitzt eine Lösung $v \in C([0,T], W)$ mit

$$\exp(-2ct)\,\|v(t)\|_0^2 + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \exp(-2cs)\,|v(s)|_W^2\,ds \quad\le\quad \|v(0)\|_0^2\,.$$

7 Finite-Elemente-Approximation der Black-Scholes-Gleichung

Zu $h > 0$, $J > 0$ definiere $\phi_j(x) = \max\{0, 1 - \frac{|x - jh|}{h}\}$ und $W_h = \text{span}\{\phi_j\}_{j=1,\dots,J}$.

(7.6) Für $\Pi_h w = \sum w(jh)\phi_j$ gilt $\|w - \Pi_h w\|_0 \le C\, h^2\, \|\partial_x^2 w\|_0$ für $w \in C_0^2((0, x_{J+1}))$.

(7.7) Für W_{h_m} mit $h_m \longrightarrow 0$ und $J_m h_m \longrightarrow \infty$ gilt: $\bigcup W_{h_m}$ ist dicht in W.

$a(\cdot,\cdot)$ sei eine beschränkte und elliptische Bilinearform in W, d.h. $a(v,w) \le C\,\|v\|_W \|w\|_W$ und $a(v,v) \ge \alpha\,\|v\|_W^2$, und sei $P_h\colon W \longrightarrow W_h$ mit $a(P_h w, \phi_h) = a(w, \phi_h)$ für $\phi_h \in W$ die *Galerkin-Projektion*.

(7.8) Es gilt $\|P_h w - w\|_W \le \frac{C}{\alpha} \inf_{\phi_h \in W_h} \|w - \phi_h\|_W$.

Regularitätsvoraussetzung: $C > 0$ existiert, so dass für alle $f \in L_2$ und $w \in W$ mit $a(w,\phi) = (f,\phi)_0$, $\phi \in W$, gilt: $\partial_x^2 w \in L_2$ und $\|w\|_2 \le C\,\|f\|_0$.
Dabei ist $\|w\|_2 = \sqrt{\|w\|_0^2 + \|\partial_x w\|_0^2 + \|\partial_x^2 w\|_0^2}$, $\|w\|_1 = \sqrt{\|w\|_0^2 + \|\partial_x w\|_0^2}$.

(7.9) Es gilt $\|P_h w - w\|_0 \le C\, h\|P_h w - w\|_1$ und $\|P_h w - w\|_0 \le C\, h^2 \|w\|_2$.

(7.10) Sei $u(t) \in W$ mit $(\partial_t u(t), \phi)_0 + a(u(t), \phi) = 0$ für $\phi \in W$ und $u_h(t) \in W_h$ mit $(\partial_t u_h(t), \phi_h)_0 + a(u_h(t), \phi_h) = 0$ und $(u_h(0) - u(0), \phi_h) = 0$ für $\phi_h \in W_h$.
Dann gilt $\|u(t) - u_h(t)\|_0 \le C\, h^2 \left(\|u(0)\|_2 + \int_0^t \|\partial_t u(s)\|_2\, ds \right)$.

(7.11) Sei $\partial_{\Delta t} u(t) = (\Delta t)^{-1}(u(t) - u(t - \Delta t))$, $t_n = n\Delta t$.
Sei u_h^n mit $(\partial_{\Delta t} u_h^n, \phi_h)_0 + a(u_h^n, \phi_h) = 0$ und $(u_h^0 - u(0), \phi_h) = 0$ für $\phi_h \in W_h$.

$$\text{Dann gilt } \|u_h^n - u(t_n)\|_0 \le C\, h^2 \left(\|u(0)\|_2 + \int_0^{t_n} \|\partial_t u\|_2\, ds \right) + C\,\Delta t \int_0^{t_n} \|\partial_t^2 u\|_0\, ds.$$

8 Numerische Approximation amerikanischer Optionen

(8.1) a) $\max\{S - K\exp(-r(T-t)), 0\} \le V_C^{\mathrm{eu}} \le S$

b) $\max\{K\exp(-r(T-t)) - S, 0\} \le V_P^{\mathrm{eu}} \le K\exp(-r(T-t))$

c) $V_C^{\mathrm{am}} = V_C^{\mathrm{eu}}$

d) $K\exp(-r(T-t)) \le S + V_P^{\mathrm{eu}} - V_C^{\mathrm{eu}} \le K$

e) $\max\{K - S, 0\} \le V_P^{\mathrm{am}} \le K$

Put-Call-Parität $S + V_P^{\mathrm{eu}} - V_C^{\mathrm{eu}} = K\exp(-r(T-t))$

(8.2) Für alle $t \in (0,T)$ existiert eine Grenze $S_f(t) \in (0,K)$ mit

$$V_P^{\mathrm{am}}(S,t) = K - S, \quad S \le S_f(t), \qquad V_P^{\mathrm{am}}(S,t) > \max\{K - S, 0\}, \quad S > S_f(t).$$

(8.3) Es gilt für $V = V_P^{\mathrm{am}}$ und $\Lambda(S) = \max\{K - S, 0\}$

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + rS\partial_S V - rV \ge 0, \quad V - \Lambda(S) \ge 0,$$
$$(\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + rS\partial_S V - rV)(V - \Lambda(S)) = 0.$$

8 Einschub: Das Hindernisproblem

Sei $\Omega = (-1, 1)$, $f \in C^2(\Omega)$, $f(-1) < 0$, $f(1) < 0$, $f''(x) < 0$.

A) *Freies Randwertproblem*
Bestimme $u \in C^1(\Omega)$ mit $u(-1) = u(1) = 0$ und Randwerte $-1 < a < b < 1$ mit $u \in C^2(\Omega \setminus \{a, b\})$ und

$$u''(x) = 0,\ u(x) > f(x), \quad x \in \Omega \setminus [a, b], \qquad u(x) = f(x), \quad a < x < b.$$

B) *Lineares Komplimentaritätsproblem*
Bestimme $u \in C^1(\Omega)$ mit $u(-1) = u(1) = 0$ und Randwerte $-1 < a < b < 1$ mit $u \in C^2(\Omega \setminus \{a, b\})$ und

$$u''(x) \le 0, \qquad u(x) - f(x) \ge 0, \qquad u''(x)(u(x) - f(x)) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{a, b\}.$$

C) *Variationsungleichung*
Bestimme $u \in K$ mit $\int_\Omega u'(v - u)'\, dx \ge 0$ für $v \in K$.

D) *Minimierungsproblem*
Bestimme $u \in K$ mit $\frac{1}{2} \int_\Omega |u'|^2\, dx \le \frac{1}{2} \int_\Omega |v'|^2\, dx$ für $v \in K$.

$H^1_0(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) \colon\ v(x) = \int_{-1}^x w(s)\, ds,\ \int_{-1}^1 w(s)\, ds = 0,\ w \in L_2(\Omega)\}$
$K = \{v \in H^1_0(\Omega) \colon\ v(x) \ge f(x)\}$

8 Amerikanischer Optionen: Das projezierte SOR-Verfahren

In transformierten Variablen gilt für die amerikanische Put-Option

$$(\partial_t u - \partial_x^2 u)(u - f) = 0, \qquad \partial_t u - \partial_x^2 u \geq 0, \qquad u - f \geq 0.$$

Durch Finite Differenzen in Zeit und Ort ergibt sich

$$(Au^n - b^n)^T (u^n - f^n) = 0, \qquad Au^n - b^n \geq 0, \qquad u^n - f^n \geq 0$$

mit $A \in \mathbb{R}^{J,J}$ symmetrisch positiv definit, $b^n, f^n \in \mathbb{R}^J$. Im Folgenden betrachten wir einen festen Zeitpunkt t_n und lassen wir den Index n weg.

(8.4) S0) Wähle $u^0 \geq f$, $\omega \in (1,2)$, und setze $k = 0$.
S1) Teste auf Konvergenz.
S2) Für $j = 1, ..., J$ setze

$$\begin{aligned} z_j^k &= a_{jj}^{-1}\Big(b_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} u_i^{k+1} - \sum_{i=j+1}^{J} a_{ji} u_i^k\Big) \\ u_j^{k+1} &= \max\{u_j^k + \omega(z_j^k - u_j^k), f_j\} \end{aligned}$$

S3) Setze $k := k+1$ und gehe zu S1).

(8.5) Das projezierte SOR-Verfahren konvergiert gegen das eindeutige Minimum von $F(u) = \frac{1}{2} u^T A u - u^T b$ unter der Nebenbedingung $u \geq f$.

8 Amerikanischer Optionen: Primal-duale aktive Mengen-Strategie

Betrachte die Black-Scholes-Gleichung $\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + rS\partial_S V - rV \geq 0$.
Setze $x = S$, $v(x,t) = V(S, T-t)$, $f(x) = \max\{K - S, 0\}$.
Sei $a(\cdot,\cdot)$ die Bilinearform aus (7.1) und $W_h = \mathrm{span}\{\phi_j\}$ der Finite Elemente Raum aus (7.6). Definiere

$$C_h = \{w_h \in W_h\colon\ w_h(x_j) \geq 0\}\,, \qquad K_h = \{w_h \in W_h\colon\ w_h(x_j) - f(x_j) \geq 0\}\,.$$

(8.6) Setze $\tau = T/N$ und $t_n = n\tau$. Bestimme $v_h^n \in K_h$ mit

$$\frac{1}{\tau}(v_h^n - v_h^{n-1}, v_h^n - \phi_h)_0 + \frac{1}{2}a(v_h^n + v_h^{n-1}, v_h^n - \phi_h) = 0 \quad \text{für alle } \phi_h \in K_h\,.$$

(8.7) Primal-duale aktive Mengen-Strategie (in $\mathbb{R}^J$ mit Matrizen $\underline{M}$, $\underline{A}$ und $\alpha > 0$)
S0) Setze $\underline{v}^0 = \underline{f}$, $n = 1$, $\underline{\lambda}^0 = 0$.
S1) $\underline{v}^{n,0} = \underline{v}^{n-1}$, $\underline{\lambda}^{n,0} = \underline{\lambda}^{n-1}$, $k = 1$, $\underline{b}^n = (\frac{1}{\tau}\underline{M} - \frac{1}{2}\underline{A})\underline{v}^{n-1}$
S2) Aktive Menge $\mathscr{A}_{n,k} = \{j\colon\ \underline{\lambda}_j^{n,k-1} + \alpha(\underline{f}_j - \underline{v}_j^{n,k-1} > 0\}$.
S3) Falls $k > 1$ und $\mathscr{A}_{n,k} = \mathscr{A}_{n,k-1}$, setze $\underline{v}^n = \underline{v}^{n,k}$, $\underline{\lambda}^n = \underline{\lambda}^{n,k}$,
setze $n := n+1$ und gehe zu S1).
S4) Bestimme $(\underline{v}^{n,k}, \underline{\lambda}^{n,k})$ mit $(\frac{1}{\tau}\underline{M} + \frac{1}{2}\underline{A})\underline{v}^{n,k} - \underline{\lambda}^{n,k} = \underline{b}^n$
und $\underline{v}_j^{n,k} = \underline{f}_j$ für $j \in \mathscr{A}_{n,k}$ und $\underline{\lambda}_j^{n,k} = 0$ für $j \notin \mathscr{A}_{n,k}$.
S5) Setze $k := k+1$ und gehe zu S2).