1 Potentialströmungen

Eine Potentialströmung in $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D = 2, 3$, wird durch den (hydrostatischen) Druck

$$p\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

den Fluss

$$q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

und dem Materialgesetz (Darcy)

$$q = -K(\nabla p - g)$$

beschrieben. Dabei ist K der Permeabilitätstensor und $g = \nabla G$ der Gravitationsvektor.
Im Folgenden verwenden wir die Hilfsgröße $u = -p + G$, d.h., $q = -K(\nabla p - g) = K\nabla u$.

Auf dem Rand $\partial\Omega = \Gamma_{\mathrm{D}} \cup \Gamma_{\mathrm{N}}$ werden Randdaten

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{D}} &: \quad \Gamma_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\\ g_{\mathrm{N}} &: \quad \Gamma_{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

für die Randbedingungen $u = u_{\mathrm{D}}$ auf Γ_{D} und $q \cdot n = g_{\mathrm{N}}$ auf Γ_{N} vorgegeben.

Aus der Bilanzgleichung

$$\int_{\partial Y} q \cdot n \,\mathrm{d}a = 0 \quad \text{für jedes Teilvolumen } Y \subset \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{div} q = 0$$

ergibt sich für jede Testfunktion $\phi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi = 0$ auf Γ_{D} die Variationsgleichung für u

$$\int_\Omega K\nabla u \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g_{\mathrm{N}}\phi \,\mathrm{d}a\,.$$

2 Lineare und bilineare Finite Elemente in 2D

Sei $\bar\Omega = \bigcup_{\tau\in\mathcal{T}} \bar\tau$ eine Zerlegung in Drei- und Vierecke $\bar\tau = \operatorname{conv}\mathcal{N}_\tau$.

(2.1) Eine Zerlegung heißt *zulässig*, wenn $\operatorname{conv}(\mathcal{N}_\tau \cap \operatorname{conv}\mathcal{N}_{\tau'}) = \operatorname{conv}\mathcal{N}_\tau \cap \operatorname{conv}\mathcal{N}_{\tau'}$ für $\tau, \tau' \in \mathcal{T}$.

Zu jedem Drei- oder Viereck $\tau \in \mathcal{T}$ sei $\hat\tau = \operatorname{conv}\mathcal{N}_{\hat\tau}$ das Referenzdreieck oder -viereck. In $\hat\tau$ bestimme eine Knotenbasis $\hat\phi_i$ mit $\hat\phi_i(\hat z_j) = \delta_{ij}$ für $\hat z_j \in \mathcal{N}_{\hat\tau}$. Setze $V_{\hat\tau} = \operatorname{span}\{\hat\phi_i\}$. Sei $\varphi_\tau\colon \hat\tau \longrightarrow \bar\tau$ und $V_\tau = \{\hat\phi \circ \varphi_\tau^{-1} : \hat\phi \in V_{\hat\tau}\}$. Setze $\mathcal{N} = \bigcup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathcal{N}_\tau = \{z_1, \dots, z_N\}$.

Definiere $V_h = \{\phi_h\colon \phi_h \circ \varphi_\tau \in V_{\hat\tau}\}$ und $V_h(u) = \{\phi_h \in V_h\colon \phi_h(z) = u(z) \text{ für } z \in \mathcal{N} \cap \Gamma_{\mathrm{D}}\}$. Die Finite-Elemente-Lösung $u_h \in V_h(u_{\mathrm{D}})$ ist durch die Variationsgleichung

$$\int_\Omega K\nabla u_h \cdot \nabla\phi_h \,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\phi_h \,\mathrm{d}a\,, \qquad \phi_h \in V_h(0)$$

definiert. Sei $\phi_1, \dots, \phi_N \in V_h$ eine Knotenbasis mit $\phi_n(\hat z_k) = \delta_{nk}$ und $u_h = \sum \underline{u}_n\phi_n$. Dann gilt $\underline{A}\,\underline{u} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A}[n,k] = \int_\Omega K\nabla\phi_k \cdot \nabla\phi_n \,\mathrm{d}x\,, \qquad \underline{b}[n] = \int_{\partial\Omega} g_{\mathrm{N}}\phi_n \,\mathrm{d}a$$

für $n \notin I_{\mathrm{D}} = \{n\colon z_n \in \Gamma_{\mathrm{D}}\}$. Für $n \in I_{\mathrm{D}}$ setze $\underline{A}[n,k] = \delta_{nk}$ und $\underline{b}[n] = u_{\mathrm{D}}(z_n)$.

(2.2) Sei K symmetrisch und uniform positiv definit (d.h. $Ky \cdot y \geq \kappa|y|^2$ mit $\kappa > 0$), und sei $I_D \neq \emptyset$. Dann ist $\underline{A}$ regulär und auf $\underline{V}(0) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^N\colon \underline{v}_n = 0 \text{ für } n \in I_{\mathrm{D}}\}$ symmetrisch positiv definit.

3 Lösung dünn besetzter Gleichungssysteme

Karlsruhe Institute of Technology

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $b \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Bestimme eine Lösung $u \in \mathbb{R}^N$ von $Au = b$.

(3.1) Eine Matrix A heißt *dünn besetzt*, wenn $C > 0$ unabhängig von N existiert, so dass gilt

$$|\{(n,k)\colon A[n,k] \neq 0\}| \leq C\,N\,.$$

Sei $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ein dünn besetzter Vorkonditionierer.

LS0) Gegeben u^0, wähle $\varepsilon, \theta > 0$, setze $r^0 = b - Au^0$ und $k = 0$.
LS1) Falls $|r^0| \leq \max\{\varepsilon, \theta|r^0|\}$ STOP
LS2) Berechne

$$\begin{aligned} c^k &= Br^k \\ u^{k+1} &= u^k + c^k \\ r^{k+1} &= r^k - Ac^k \end{aligned}$$

LS3) Setze $k := k+1$ und gehe zu LS1).

Zur Zerlegung $A = D + L + R$ mit $D = \mathrm{diag}(A)$ und Dreicksmatrizen L und R definiere $B_{\mathrm{Jac}} = D^{-1}$ (Jacobi) und $B_{\mathrm{GS}} = (D+L)^{-1}$ (Gauss-Seidel).

Zu $A = \sum A_p$, Vorkonditionierern B_p und Restriktionen R_p definiere $B_{\mathrm{par}} = \sum R_p^\top B_p R_p$.

Zu Restriktionen $R_0, \dots, R_{L-1}$ und $A_L = A$ definiere rekursiv $A_l = R_l A_{l+1} R_l^\top$ und B_l durch $B_0 = A_0^{-1}$ und $c_l = B_l r_l$ mit

$$\begin{aligned} c_l &= B_{\mathrm{GS}} r_l \\ r_l &:= r_l - A_l c_l \\ c_{l-1} &= B_{l-1} R_{l-1} r_l \\ c_l &:= c_l + R_{l-1}^\top c_{l-1}\,. \end{aligned}$$

4 Gemischte Finite Elemente

Betrachte das System

$$\operatorname{div} q = 0\,, \qquad q = K\nabla u \qquad \text{in } \Omega$$

mit den Randbedingungen

$$u = u_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}}\,, \qquad q \cdot n = g_{\mathrm{N}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}}\,.$$

Sei $\mathcal{T}$ eine zulässige Triangulierung, und seien $\mathcal{F}$ die Seiten $f = \partial\tau \cap \partial\tau'$ bzw. $f = \partial\tau \cap \partial\Omega$.

Im Referenzdreieck oder -viereck definiere $\hat{W} = \operatorname{span}\{\hat{\psi}_i\}$ mit Vektorfeldern $\hat{\psi}_i$ zu jeder Elementseite $\hat{f}_i$ mit $\int_{\hat{f}_j} \hat{\psi}_i \cdot n \,\mathrm{d}a = \delta_{ij}$. Sei $\varphi_\tau : \hat{\tau} \longrightarrow \bar{\tau}$ und $W_\tau = \{\mathrm{D}\varphi_\tau \hat{\phi} \circ \varphi_\tau^{-1} : \hat{\phi} \in \hat{W}\}$.

Zu jeder Seite $f_n \in \mathcal{F}$ sei ψ_n das Vektorfeld mit $\int_{f_k} \hat{\psi}_n \cdot n_{f_k} \,\mathrm{d}a = \delta_{kn}$ und $\psi_n|_\tau \in W_\tau$.

Definiere $W_h = \{\psi_n \colon f_n \in \mathcal{F}\}$ und $W_h(g) = \{\psi_h \in W_h \colon \int_f \psi_h \cdot n \,\mathrm{d}a = \int_f g \,\mathrm{d}a \text{ für } f \subset \Gamma_{\mathrm{N}}\}$.
Definiere $Q_h = \prod_\tau \mathcal{P}_0$. Die gemischte Finite-Elemente-Lösung $(q_h, u_h) \in W_h(g_{\mathrm{N}}) \times Q_h$ ist durch das Sattelpunkt-Problem

$$\begin{aligned} \int_\Omega K^{-1} q_h \cdot \psi_h \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u_h \operatorname{div} \psi_h \,\mathrm{d}x &= \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} u_{\mathrm{D}} \phi_h \cdot n \,\mathrm{d}a\,, \\ \int_\Omega \operatorname{div} q_h \phi_h \,\mathrm{d}x &= 0\,, \qquad (\psi_h, \phi_h) \in W_h(0) \times Q_h \end{aligned}$$

definiert. Für die analytische Lösung q und für Finite-Elemente-Lösungen $q_h \in W_h$ und $u_h \in V_h$ mit $u_h = u_{\mathrm{D}}$ auf Γ_{D} und $q_h \cdot n = g_{\mathrm{N}}$ auf Γ_{N} gilt die Fehlerabschätzung

$$\|q - q_h\|_{K^{-1}} \le C \|K\nabla u_h - q_h\|_{K^{-1}} \qquad \text{mit } \|\psi\|_{K^{-1}}^2 = \int_\Omega K^{-1} \psi \cdot \psi \,\mathrm{d}x\,.$$

5 Finite Volumen für die lineare Transportgleichung

Zu gegebenem Fluss $q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$ mit $\operatorname{div} q = 0$ bestimme die Dichte $\rho\colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho q) = 0 \text{ in } [0,T]\,, \qquad \rho(0) = \rho_0\,,$$

und mit der Einfluss-Randbedingung

$$\rho = \rho_{\text{in}} \text{ auf } \Gamma_{\text{in}} = \{x \in \partial\Omega\colon\ q\cdot n < 0\}\,.$$

Sei $F(\rho) = \rho q$ der Fluss und definiere M, A, b durch

$$(M\rho,\phi)_\Omega = \int_\Omega \rho\phi\,\mathrm{d}x\,,\ (A\rho,\phi)_\Omega = -(\operatorname{div} F(\rho),\phi)_\Omega + (F(\rho)\cdot n,\phi)_{\Gamma_{\text{in}}}\,,\ (b,\phi)_\Omega = -(F(\rho_{\text{in}})\cdot n,\phi)_{\Gamma_{\text{in}}}\,.$$

Dann gilt $(M\partial_t\rho,\phi)_\Omega = (A\rho + b,\phi)_\Omega$ für alle $\phi \in L_2(\Omega)$ und $t \in (0,T)$.

Definiere $Q_h = \prod_\tau \mathbb{P}_0$ (finite Volumen) bzw. $Q_h = \prod_\tau \mathbb{P}_p$ (discontinuous Galerkin).

Definiere M_h, A_h, b_h durch $(M_h\rho_h,\phi_h)_\Omega = (M\rho_h,\phi_h)_\Omega$, $(b_h,\phi_h)_\Omega = (b,\phi_h)_\Omega$, und

$$(A_h\rho_h,\phi_h)_\Omega = \Big(\sum_\tau -(\operatorname{div} F(\rho_h),\phi_h)_\tau + \sum_{f\subset\partial\tau\setminus\Gamma_{\text{in}}} (F(\rho_\tau) - F^*_{\tau,f}(\rho_h)\cdot n,\phi_h)_f\Big) + (F(\rho_h)\cdot n,\phi_h)_{\Gamma_{\text{in}}}$$

mit dem numerischen Fluss auf $f = \partial\tau \cap \partial\tau'$

$$F^*_{\tau,f}(\rho_h) = [F(\rho_h)]_f - |[F(\rho_h)]_f|\,, \qquad [F(\rho_h)]_f = F(\rho_{\tau'}) - F(\rho_\tau)$$

und $F^*_{\tau,f}(\rho_h) = 0$ für $f \subset \partial\Omega \setminus \Gamma_{\text{in}}$.

6 Adaptivität

Sei $u_h \in V_h(u_D)$ für $h \in \mathcal{H}$ eine Finite-Elemente-Approximation der Lösung u von $-\operatorname{div} K\nabla u = 0$ in Ω mit $u = u_D$ auf Γ_D und $K\nabla u \cdot n = g_N$ auf Γ_N.

Wir schätzen den Fehler bezüglich $\|\phi\|_{1,\Omega} = \left(\|\phi\|_\Omega^2 + \|\nabla\phi\|_\Omega^2\right)^{1/2}$.

Dazu setzen wir voraus, dass für die Triangulierungen $\mathcal{T}_h$ und die Finite-Elemente-Räume V_h für alle $h \in \mathcal{H}$ folgende Abschätzungen mit Konstanten unabhängig von h gelten:

$$\inf_{\phi_h \in V_h} \|u - \phi_h\|_\tau + h_\tau^{1/2}\|u - \phi_h\|_{\partial\tau} \le C h_\tau \|u\|_{1,\tau}\,, \quad h_\tau\|\nabla\phi_h\|_\tau + h_\tau^{1/2}\|\phi_h\|_{\partial\tau} \le C\,\|\phi_h\|_\tau\,.$$

(7.1) Für den Fehlerschätzer

$$\eta_h = \Big(\sum_{\tau\in\mathcal{T}} \eta_\tau^2\Big)^{1/2}$$

mit

$$\eta_\tau^2 = h_\tau^2\|\operatorname{div} K\nabla u_h\|_\tau^2 + \frac{1}{2}h_\tau \sum_{f\subset\partial\tau} \|[K\nabla u_h]\cdot n\|_f^2$$

und $[\psi] = \psi_{\tau'} - \psi_\tau$ auf $f = \partial\tau \cap \partial\tau'$ gilt:

a) Der Fehlerschlätzer ist zuverlässig, d.h.

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \le C\,\eta_h\,.$$

b) Der Fehlerschlätzer ist effizient, d.h.

$$\eta_\tau \le C\,\|u - u_h\|_{1,\omega_\tau} \qquad \text{mit } \bar\omega_\tau = \cup_{\partial\tau\cap\partial\tau'\neq\emptyset}\bar\tau'\,.$$

7 Die Konvektions-Diffusions-Reaktionsgleichung

Karlsruhe Institute of Technology

Zu gegebenem Fluss $q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$ mit $\operatorname{div} q = 0$, Diffusionstensor $K_c\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{D\times D}$ und Reaktionsrate $r\colon \Omega \times [0,t] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimme die Konzentration $c\colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t c - \operatorname{div}(K_c \nabla c - cq) = r(c) \ \text{ in } \ [0,T]\,, \qquad c(0) = c_0\,,$$

mit den Randbedingungen

$$c = c_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}} \times [0,T]\,, \quad K_c \nabla c \cdot n = g_{\mathrm{N}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}} \times [0,T]\,, \quad K_c \nabla c \cdot n + \alpha c = g_{\mathrm{R}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{R}} \times [0,T]\,.$$

Definiere A und R durch

$$\begin{aligned}
(Ac,\phi)_\Omega &= \int_\Omega \big(K_c \nabla c \cdot \nabla\phi + q \cdot \nabla c \phi\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} \alpha c \phi \,\mathrm{d}a\,,\\
(R(c),\phi)_\Omega &= \int_\Omega r(c)\phi\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\phi\,\mathrm{d}a + \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} g_{\mathrm{R}}\phi\,\mathrm{d}a\,.
\end{aligned}$$

(7.1) Dann gilt $(\partial_t c,\phi)_\Omega + (Ac,\phi)_\Omega = (R(c),\phi)_\Omega$ für alle $\phi \in V$ und $t \in (0,T)$.

(7.2) Sei $\Gamma_{\mathrm{D}} \cup \mathcal{N}_h \neq \emptyset$, $q \cdot n \geq 0$ auf Γ_{N}, $\alpha + \frac{1}{2} q \cdot n \geq 0$ auf Γ_{R}, $\partial_3 r \leq 0$, und K_c uniform positiv definit.
Dann ist für alle $\triangle t > 0$ das diskrete Problem

$$c_h^n \in V_h(c_D(t_n))\colon \qquad \Big(\frac{1}{\triangle t}(c_h^n - c_h^{n-1}) + Ac_h^n - R'(c_h^n), \phi_h\Big)_\Omega = 0\,, \qquad \phi_h \in V_h(0)$$

eindeutig lösbar.